Lecture Summary

Contents

0 Vorkenntnisse – Was man hätte lernen sollen 3
0.1 Lineare Gleichungssysteme 3
0.2 Vektorrechnung in der Ebene 3
0.3 Komplexe Zahlen 3
0.4 Polynome 3
0.5 Das griechische Alphabet 4
0.6 Notation 4
1 Lineare Gleichungssysteme – Gauss-Elimination 4
1.1 Gauss-Elimination: der reguläre Fall 4
1.2 Gauss-Elimination: der allgemeine Fall 4
1.3 Die Losungsmenge eines linearen Gleichungssystems 5
2 Matrizen und Vektoren in $\mathbb{R}n$ und $\mathbb{C}n$ 5
2.1 Matrizen, Zeilen und Kolonnenvektoren 5
2.2 Das Rechnen mit Matrizen und Vektoren 6
2.3 Die Transponierte einer Matrix; symmetrische und Hermitesche Matrizen 6
2.4 Das Skalarprodukt und die Norm von Vektoren; Langen und Winkel 7
2.5 Das äussere Produkt und die orthogonale Projektion auf eine Gerade 8
2.6 Matrizen als lineare Abbildungen 8
2.7 Die Inverse einer Matrix 8
2.8 Orthogonale und unitäre Matrizen 8
2.9 Strukturierte Matrizen 8
3 Die LR–Zerlegung 9
3.1 Die Gauss-Elimination als LR-Zerlegung 9
3.2 Die Gauss-Elimination als LR-Zerlegung: der allgemeine Fall 10
3.3 Block–LR–Zerlegung und LR-Updating 10
3.4 Die Cholesky-Zerlegung 10
4 Vektorräume 10
4.1 Definition und Beispiele 10
4.2 Unterraume, Erzeugendensysteme 11
4.3 Lineare Abhängigkeit, Basen, Dimension 12
4.4 Basiswechsel, Koordinatentransformation 12
5 Lineare Abbildungen 13
5.1 Definition, Beispiele, Matrixdarstellung 13
5.2 Kern, Bild und Rang 13
5.3 Matrizen als lineare Abbildungen 13

5.4 Affine Raume und die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems 14
5.5 Die Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation 15
6 Vektorraume mit Skalarprodukt 15
6.1 Normierte Vektorraume 15
6.2 Vektorraume mit Skalarprodukt 15
6.3 Orthonormalbasen 16
6.4 Orthogonale Komplemente 16
6.5 Orthogonale und unitäre Basiswechsel und Koordinatentransformationen 17
6.6 Orthogonale und unitäre Abbildungen 17
6.7 Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen 17
7 Die Methode der kleinsten Quadrate und die QR–Zerlegung einer Matrix 18
7.1 Orthogonalprojektionen 18
7.2 Die Methode der kleinsten Quadrate 19
7.3 Die QR–Zerlegung einer Matrix 19
7.4 Die QR–Zerlegung mit Pivotieren 20
8 Determinanten 20
8.1 Permutationen 20
8.2 Determinante: Definition, Eigenschaften 20
8.3 Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen 21
8.4 Determinanten von Blockdreiecksmatrizen 21
9 Eigenwerte und Eigenvektoren 21
9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen und linearen Abbildungen 21
9.2 Ähnlichkeitstransformationen; die Eigenwertzerlegung 22
9.3 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und Hermitescher Matrizen 22
9.4 Die Jordansche Normalform 23
10 Anwendungen der Eigenwertzerlegung 23
10.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 23
10.2 Funktionen von Matrizen 23
10.3 Reelle lineare Differentialgleichungen mit komplexen Eigenwerten 23
10.4 Quadratische Formen und ihre Hauptachsentransformation 23
10.5 Quadratische Funktionen 24
10.6 Die Spektralnorm 24
11 Die Singularwertzerlegung 24
11.1 Die Singulärwertzerlegung: Herleitung 24
11.2 Die Singulärwertzerlegung: Folgerungen 24
12 Zusätzlich 24
12.1 Maschinengenauigkeit 24

0 Vorkenntnisse – Was man hätte lernen sollen

0.1 Lineare Gleichungssysteme

Im Falle von n linearen Gleichungen in n Unbekannten gilt:

- In der Regel gibt es genau eine Lösung.
- Es gibt eine Schar von Lösungen, wenn eine Gleichung als eine Summe von Mehrfachen ("eine Linearkombination") der anderen dargestellt werden kann.
- Es gibt keine Lösung, wenn eine solche Abhängigkeit zwar auf der linken Seite besteht, nicht aber gleichzeitig für die rechte Seite gilt.

Wenn $m > n$ ("mehr Gleichungen als Unbekannte"), so gibt es in der Regel keine Lösung. Es kann aber eine oder sogar unendlich viele geben, wenn gewisse Abhängigkeiten zwischen den Gleichungen bestehen.

Wenn $m < n$ ("weniger Gleichungen als Unbekannte"), so gibt es in der Regel eine Schar von Lösungen. Es kann aber in Ausnahmefällen auch keine geben, aber nie nur endlich viele.

0.2 Vektorrechnung in der Ebene

Beispiel:

$$u = x\cos\phi - y\sin\phi\,, v = x\sin\phi + y\cos\phi$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{w} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{z} \Leftrightarrow \vec{q} = \underbrace{Q\vec{z}}_{\text{Matrix–Vektor Produkt}}$$

0.3 Komplexe Zahlen

- Allgemein: $w = u + iv, z = \underbrace{x}_{\operatorname{Re} z} + i\,\underbrace{y}_{\operatorname{Im} z}$; $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z = 0\}$
- Addition: $w + z = (u + iv) + (x + iy) = (u + x) + i(v + y)$
- Multiplikation mit α: $\alpha w = \alpha(u + iv) = (\alpha u + i\alpha v)$
- Multiplikation:
$$wz = (u + iv)(x + iy) = ux + i(vx + uy) + i^2(vy) = (ux - vy) + i(vy + uy)$$
- Division : $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \tau z\bar{w};\ \tau := \frac{1}{|w|^2}$
- Konjugiert-Komplex
$$z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$$
$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0;\ = 0\ f\ddot{u}r\ z = 0$$
$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$
- Polarkoordinaten
$$z = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \text{falls} \begin{cases} r = |z| \\ \phi = \arccos\frac{x}{r} = \arcsin\frac{y}{r} \end{cases}$$
$$\text{Es gilt: } z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\text{Mit } e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \text{ erhalten wir } z = re^{i\phi} \text{ (Polarform)}$$

0.4 Polynome

- Allgemein: $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0; a_0 \ldots a_n$: Koeffizienten
- Nullstelle: $p(z_1) = 0$, Deflation an der Nullstelle z_1: $q(z) := \frac{p(z)}{z - z_1}$, $\exists z_1 \in \mathbb{C}: p(z_1) = 0$ in $\mathbb{C}$ hat ein Polynom von Grad n genau n Nullstellen (nicht alle müssen verschieden sein), daher: $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$

0.5 Das griechische Alphabet

0.6 Notation

1 Lineare Gleichungssysteme – Gauss-Elimination

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \text{Koeffizizenten-Matrix}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{x \\ \text{Unbekannte}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\substack{b \\ \text{rechte Seite}}}$$

1.1 Gauss-Elimination: der reguläre Fall

- "Regulär" = eindeutige Lösung für ein quadratisches LGS, „singulär" falls nicht eindeutig
- Wichtige Begriffe: obere Dreiecksgestalt, Rückwärtseinsetzen, Pivot-[…]
- Elementare Zeilen-Operationen
  - Vertauschen von Gleichungen (Zeilen)
  - Addition/Subtraktion eines Vielfachen der Pivotgleichung (Pivotzeile) zu/von einer anderen Gleichung Zeile
  - (Multiplikation einer Gleichung mit $n \neq 0$)
- Grundidee: Ein lineares System aus m Gleichungen in n Unbekannten wird durch die elementaren Zeilen-Operationen i) und ii) schrittweise in äquivalente, gleich grosse Systeme verwandelt, wobei es nach j Schritten ein Teilsystem von $m - j$ Gleichungen gibt, das nur noch höchstens $n - j$ Unbekannte enthält.

1.2 Gauss-Elimination: der allgemeine Fall

Falls die erste Spalte des gegeben Systems oder die erste Spalte eines Restgleichungssystem lauter Nullen enthält, tritt eine Spezialfall ein in welchem man nicht nach der entsprechenden Variablen auflösen kann. Diese wird dann als freie Variable bezeichnet. Dies führt dazu, dass das Endschema eine Zeilenstufenform annehmen wird. Der Rang r entspricht dann der Anzahl Pivotelemente.

- Wichtige Begriffe: Zeilenstufenform
- Allgemeine Lösung eines LGS setzt für freie Variablen (Vielfache), Parameter ein: $x_i = \alpha$ etc.

Algorithmus

Zum Lösen des $m \times n$-Gleichungssystems $Ax = b$ setzte$j := 1, n_1 := 1, A^{(0)} := A, b^{(0)} := b$, und betrachte das gegebene System als 0-tes Restgleichungssytem.

j-ter Eliminationsschritt

a) Sind alle Koeffizienten in den l vordersten Kolonnen des $(j-1)$sten Restgleichungssystems0, so sind $x_{n_j} \dots x_{n_j+l-1}$ freie Variablen; streiche diese l Kolonnen und setze$n_j := n_j + l$; falls dann $n_j > n$, setze $r := j - 1$ und gehe zum Verträglichkeitstest.
   Wähle in der vordersten Kolonne des verbleiben Restgleichungssystems das j-te Pivotelement $a_{j,n_j}^{(j-1)} \neq 0$ aus. Für den Zeilenindex p der Pivotzeile gilt dabei $p \in \{j, \dots, m\}$. Falls $p \neq j$, vertausche Zeile p mit der Zeile j und nummeriere die Koeffizenten der rechte Seiten entsprechend um; das Pivotelement heisst, dann $a_{j,n_j}^{(j-1)}$.

b) Falls $j = m$, setze $r = m$ und gehe zum Rückwärtseinsetzen.
   Andernfallse berechne für $k = j+1, \dots, m$ die Faktoren
   $$l_{kj} := a_{k,n_j}^{(j-1)} / a_{j,n_j}^{(j-1)}$$
   und subtrhiere das l_{kj}-fache der Pivotzeile (mit Index j) von der Zeile mit Index k:
   $$a_{ki}^{(j)} := a_{ki}^{(j-1)} - l_{kj} a_{ji}^{(j-1)}, i = n_j + 1, \dots, n$$
   $$b_k^{(j)} := b_k^{(j-1)} - l_{kj} b_j^{(j-1)}$$
   Falls $n_j = n$, si dass obige a-Gleichung leer ist, setze $r = j$ und gehe zum Verträglichkeitstest. Andernfalls setze $n_{j+1} := n_j + 1$ und $j := j + 1$ und beginne den nächsten Eliminationsschritt.

- Verträglichkeitstest: Falls $m > r$ und $b_k^{(r)} \neq 0$ für ein $k > r$, so hat das System keine Lösung. Abbruch.

- Rückwärtseinsetzen: Bestimme eine Lösung des resultierenden Systems in Zeilenstufenform: berechne dazu für $k = r, r-1, \dots, 1$

$$x_{n_k} := \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{i=n_k+1}^{n} a_{ki}^{(k-1)} x_i \right) \frac{1}{a_{k,n_k}^{(k-1)}}$$

wobei die freien Variablen (d.h. jene x_i mit $i \notin \{n_1, \dots, n_r\}$) frei wählbar sind.

1.3 Die Losungsmenge eines linearen Gleichungssystems

- m Gleichungen, n Unbekannten

Satz 1.1 Das System hat genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn:

- Entweder $r = m$
- Oder $r < m$ und $c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_m = 0$

Gibt es Lösungen, so gilt:

- Falls $r = n$: die Lösung ist eindeutig
- Falls $r < n$: es gibt einen $(n-r)$-parametrige Lösungsschar.

Korollar 1.3

i) $\left.\begin{matrix} Ax = b \\ \text{hat genau eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r = n = m \text{ oder} \\ \begin{cases} r = n < m \text{ und} \\ c_{r+1} = \cdots = c_m = 0 \end{cases} \end{matrix}\right\}$

ii) $\left.\begin{matrix} Ax = b \\ \text{hat für jedes } b \text{ (mindestens)eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow r = m$

iii) $\left.\begin{matrix} Ax = b \\ \text{hat für jedes } b \text{ genau eine Lösung} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow r = m = n$

Korollar 1.4 Die Lösung eines quadratischen LGS (mit $m = n$) ist genau dann eindeutg, wenn das System für beliebige rechte Seiten lösbar ist (**Kor 1.6** falls LGS quadratisch, nur dann für beliebige b lösbar falls das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung besitzt).

Definition Ein LGS heisst *homogen* falls die rechte Seite aus Nullen besteht, sonst *inhomogen*. Die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ heisst *triviale Lösung*, sonst *nichttrivial* (**Kor 1.5** treten auf falls $n < r$).

Korollar 1.7 Für ein quadratisches LGS $Ax = b$ gelten entweder die vier äquivalenten Aussagen

i) $r := \operatorname{Rang} A = n \to A$ ist regulär
ii) Für jedes b gibt es (mind.) eine Lösung
iii) Für jedes b gibt es genau eine Lösung
iv) Das entsprechende homogene System hat nur die triviale Lösung

Oder es gelten die fünf ebenfalls äquivalenten Aussagen

i) $r := \operatorname{Rang} A < n \to A$ ist singulär
ii) Für gewisse b gibt es keine Lösung
iii) Für kein b gibt es eine eindeutige Lösung
iv) Für gewisse b gibt es unendlich viele Lösungen
v) Das entsprechende homogene System hat nichttriviale Lösungen.

2 Matrizen und Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

2.1 Matrizen, Zeilen und Kolonnenvektoren

- Kolonnenvektor: $m \times 1$
- Zeilenvektor: $1 \times n$

Spezielle Matrizen

- Quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

- Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = diag(a, b)$$

- Einheitsmatrix/Identität

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Untere/obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \; bzw. \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

2.2 Das Rechnen mit Matrizen und Vektoren

- **skalare Multiplikation** $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$
- **Addition zweier Matrizen** $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- **Multiplikation zweier Matrizen** („Zeile mal Spalte“)

$$A: m \times n, B: n \times p \to C \coloneqq AB: m \times p$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}; i = 1, \dots, n \mid j = 1, \dots, p$$
$$\text{für } A: 1 \times n, B: n \times 1: C: 1 \times 1 \text{ mit } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$
$$\text{für } \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}}_{C}$$

- Allgemein gilt $AB \neq BA$, falls es gilt, so kommutieren diese Matrizen. Jedoch gilt $I_m A = A = A I_n, A: m \times n$
- $(-A)_{ij} \coloneqq -(A)_{ij} (\forall i, j)$
- $A + O = O + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = O$
- $A + X = B, (X)_{ij} \coloneqq (B)_{ij} - (A)_{ij}$
- **Matrix-Vektor-Produkt** $b \coloneqq Ax; A: m \times n, x: n$

$$b \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n; i = 1, \dots, m$$

- **Linearkombination** der Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$
$$\to A \coloneqq (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

Satz 2.1

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$
- $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $ABC = (AB)C = A(BC)$
- $(A + B)C = (AC) + (BC)$
- $A(B + C) = (AB) + (AC)$

2.3 Die Transponierte einer Matrix; symmetrische und Hermitesche Matrizen

- **Transponierte** $\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \coloneqq (A)_{ji}; A: m \times n, A^{\mathrm{T}}: n \times m;\ \ (A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}, (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}, \left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|, \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$
- **Konjugiert-komplex** $(\bar{A})_{ij} \coloneqq \overline{(A)_{ij}}$
- **Konjugiert-transponiert/Hermitesch-transponiert/adjungierte** $A^{\mathrm{H}} \coloneqq (\bar{A})^{\mathrm{T}} = \overline{A^{\mathrm{T}}} = A^*$
- **Symmetrisch** falls $A^T = A\ d.h. (A)_{ij} = (A)_{ji}\ (\forall i, j)$
  Beispiele (Satz 2.7): $AB = BA \Leftrightarrow AB$ symmetrisch und für beliebige Matrizen $A^T A$ und AA^T sind symmetrisch
- **Hermitesch** falls $A^H = A\ d.h. (A)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}\ \ (\forall i, j)$

- **Schiefsymmetrisch/skew-symmetic** $A^T = -A$
- **Orthogonal** $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$

Satz 2.6

i) $(A^T)^T = A, (A^H)^H = A$
ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, (\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$
iii) $(A+B)^T = A^T + B^T, (A+B)^H = A^H + B^H$
iv) $(AB)^T = B^T A^T, (AB)^H = B^H A^H$

2.4 Das Skalarprodukt und die Norm von Vektoren; Langen und Winkel

- **Skalarprodukt in** $\mathbb{R}^2$ $\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$
- **Norm in** $\mathbb{R}^2$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- **Cosinussatz** $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$
- **Euklidisches Skalarprodukt/inneres Produkt** $\langle x, y\rangle := x^H y = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$, falls Vektoren reell $\langle x, y\rangle := x^H y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$
- **Schwarzsche Ungleichung** gilt für alle Paare $x, y \in \mathbb{E}^n$:
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \; (\Leftrightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle)$$
- **Orthogonal** $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
- **Definition** Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt im $\mathbb{R}^n$(bzw. $\mathbb{C}^n$) ist eine Funktion, die jedem Paar von n-Vektoren eine reelle (bzw. komplexe) Zahl zuordnet, wobei die Eigenschaften (S1){(S3) [bzw. (S1), (S2'), (S3)] aus Satz 2.9 gelten.
- **Kreuzprodukt** $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta$

Satz 2.9 und Korollar 2.10 Für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ gilt (in $\mathbb{C}^n$ gelten S1 und S3 auch, für S2, S4 siehe S5, S6): (jeweils: $w, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)); für „Vektorräume mit Skalarprodukt“: S4/6 wird nicht betrachtet/aufgeführt)

S1 Es ist **linear** im zweiten Faktor
$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$
$$\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$
S2 Es ist **symmetrisch**
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$
S3 Es ist **positiv definit**
$$\langle x, x\rangle \geq 0$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$$
S4 Es ist auch **linear** im ersten Faktor
$$\langle w+x, y\rangle = \langle w, y\rangle + \langle x, y\rangle$$
$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$
S5 S2 für $\mathbb{C}^n$: Es ist **Hermitesch**
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$
S6 S4 für $\mathbb{C}^n$: Es ist **konjugiert-linear** im ersten Faktor
$$\langle w+x, y\rangle = \langle w, y\rangle + \langle x, y\rangle$$
$$\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$$

Länge/2-Norm/Euklidische Norm $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$

- im reellen Fall
$$||x|| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$
- und im komplexen Fall
$$||x|| = \sqrt{x^H x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

Satz 2.12 Für die 2-Norm in $\mathbb{E}^n$ gilt:

N1 Sie ist positiv definit:
$$\|x\| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{E}^n,$$
$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$$
N2 Sie ist dem Betrage nach homogen

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \; \forall x \in \mathbb{E}^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

N3 Die Dreiecksungleichung gilt

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in \mathbb{E}^n$$

Satz von Pythagoras Für $x, y \in \mathbb{E}^n$ mit $x \perp y$ gilt: $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

2.5 Das äussere Produkt und die orthogonale Projektion auf eine Gerade

2.6 Matrizen als lineare Abbildungen

Ist $a \in \mathbb{E}^{m \times n}$ irgendeine $m \times n$ Matrix, so kann man die ebenfalls mit A bezeichnete Abbildung

$$A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m, x \mapsto Ax$$

betrachten. Sie hat zwei grundlegende Eigenschaften: $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{E}^n, \gamma \in \mathbb{E}$ gilt:

$$A(x + \tilde{x}) = Ax + A\tilde{x}, A(\gamma x) = \gamma Ax$$

zusammengefasst:

$$A(\gamma x + \tilde{x}) = \gamma(Ax) + (A\tilde{x})$$

- **Bild** $\operatorname{im} A := \{Ax \in \mathbb{E}^m; x \in \mathbb{E}^n\}$

2.7 Die Inverse einer Matrix

Eine $n \times n$-Matrix heisst invertierbar, falls es eine $n \times n$-Matrix gibt, so dass $AX = I_n = XA$ ist. Diese Matrix X heisst Inverse von A und wird mit A^{-1} bezeichnet und ist eindeutig: $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Satz 2.17 Die folgenden Aussagen über eine $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:

i) A ist invertierbar
ii) Es gibt eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = I_n$
iii) Es gibt genau eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = I_n$
iv) A ist regulär, d.h. $\operatorname{Rang} A = n$

Zusätzlich:

iv) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$
v) Die Spalten sind linear unabhängig
vi) 0 ist kein Eigenwert

Satz 2.18 Sind A, B reguläre $n \times n$-Matrizen, so gilt:

i) A^{-1} ist regulär und $(A^{-1})^{-1} = A$
ii) AB ist regulär und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
iii) A^T, A^H sind regulär und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

Satz 2.19 Ist A regulär, so hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite b eine eindeutige Lösung und zwar: $x = A^{-1}b$.

Für $A \in \mathbb{E}^{2\times 2}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.8 Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine $n \times n$-Matrix A heisst unitär, falls $A^H A = I_n$. Eine reelle unitäre Matrix heisst auch orthogonal; für sie gilt $A^T A = I_n$

Satz 2.20 Sind A, B unitäre (bzw. orthogonale) $n \times n$-Matrizen, so gilt:

i) A ist regulär und $A^{-1} = A^H$ (bzw. $A^{-1} = A^T$)
ii) $AA^H = I_n$(bzw. $AA^T = I_n$)
iii) A^{-1} ist unitär (orthogonal)
iv) AB ist unitär (orthogonal)

Satz 2.21 De durch eine orthogonale oder unitäre $n \times n$ Matrix A definierte Abbildung ist linientreu (isometrisch) und winkeltreu), d.h. es gilt $\forall x, y \in \mathbb{E}^n$:

$$\|Ax\| = \|x\|, \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

2.9 Strukturierte Matrizen

- Quadratisch $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$

- Obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$, untere Dreiecksmatrix ist analog
- Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$
- Identitätsmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$
- Blockmatrizen $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

3 Die LR–Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

3.1 Die Gauss-Elimination als LR-Zerlegung

$$\boldsymbol{A = LR}$$

Satz 3.1 Angewandt auf ein quadratisches Gleichungssystem $Ax = B$ mit regulärer AMtrix A liefert die Gauss-Elimination eine die Zeilenvertzuaschungen beschreibende Permutationsmatrix P, eine Rechtsdreiecksmatrix R des reduzierten Systems und eine entsprechen rechte Seite c sowie, durch Zusammenziehen der Zeilemenmultiplikatoren l_{kj} eine Linksdreiecksmatrix L, wobei alles quadratische Matrizen glecher Ordnung sind und die Beziehungen

$$PA = LR, Lc = Pb, Rx = c$$

gelten.
Ist die LR-Zerlegung $PA = LR$ einmal berechnet, so lässt sich irgendein System mit Koeffizientenmatrix A lösen durch Aufkösen von $Lc = Pb$ nach c (Vorwärtseinsetzen) und Auflösen von $Rx = c$ nach x (Rückwärtseinsetzen).

Rezept

$$Ax = b$$

1. L, R, P aus A mit Gauss-Verfahren (Diagonalstrategie, Spaltenmaximumstrategie, relative Spaltenmaximumstrategie) bestimmen
   a. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$
      Fungiert als Logbuch, a, b, c sind die Faktoren, mit denen man die Zeilen *abgezogen* hat und ist eine linke/untere Dreiecksmatrix.
   b. $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$
      Entspricht A am Schluss des Gauss-Verfahrens und ist eine rechte/obere Dreiecksmatrix.
   c. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Permuatationsmatrix, entspricht den Zeilenpermutationen auf A
2. $Ax = LRx = Pb$
3. $Lz = Pb$ nach z auflösen
4. $Rx = z$ nach x auflösen

- **Pivotstrategien**
  - Kolonnenmaximumstrategie: Im j-ten Schritt wird als Pivot $a_{pj}^{(j-1)}$ jenes Element gewählt, das unter allen $m - j + 1$ Elementen der ersten kolonnen der Restgleichungsmatrix das betragsmässig grösste ist

$$\left|a_{pj}^{(j-1)}\right| = \max_{j \le k \le m} \left|a_{kj}^{(j-1)}\right|$$

- Diagonalstrategie
- Relative Spaltenmaximumstrategie: die Zeilen $j \geq k$ werden multipliziert, so dass das betragsmässig grösste Element in jeder Zeile gleich 1 ist und vertauscht dann Zeilen sodass das k-te Pivot das betragsmässig grösste Element in Spalte k ist. D.h.: Hierbei werden alle Elemente der i. Kolonne durch das jeweils grösste Element ihrer Zeile geteilt und dann die Zeile mit dem grössten Wert genommen.

3.2 Die Gauss-Elimination als LR-Zerlegung: der allgemeine Fall

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 1 & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{r+1,1} & l_{r+1,2} & \cdots & l_{r+1,r} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mr} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & r_{1,n_1} & \cdots & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & & r_{2,n_2} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & r_{r,n_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

Satz 3.3 Angewandt auf ein beliebiges $m \times n$-System $Ax = B$ mit regulärer AMtrix A liefert die Gauss-Elimination eine die Zeilenvertzuaschungen beschreibende $m \times m$-Permutationsmatrix P, eine $m \times n$ Zeilenstufenmatrix R des reduzierten Systems und eine entsprechen rechte Seite $c \in \mathbb{E}^m$ sowie, durch Zusammenziehen der Zeilemenmultiplikatoren l_{kj} eine reguläre $m \times m$ Linksdreiecksmatrix L, wobei gilt

$$PA = LR, Lc = Pb, Rx = c$$

Ist die LR-Zerlegung $PA = LR$ einmal berechnet, so lässt sich irgendein System mit Koeffizientenmatrix A lösen durch Aufkösen von $Lc = Pb$ nach c (Vorwärtseinsetzen) und Auflösen von $Rx = c$ nach x (Rückwärtseinsetzen). Beim letzteren sind allfällige freie Variablen (x_k mit Indizes $k \neq n_j (\forall j)$) frei wählbar.

3.3 Block–LR–Zerlegung und LR-Updating

3.4 Die Cholesky-Zerlegung

$$A = LDL^{\mathrm{T}} (= LL^{\mathrm{T}})$$

A reell und invertierbar (Hermitesch, positiv definit), L linke Dreiecksmatrix, L^{T} (L^{H}) die transponierte von L, D Diagonalmatrix mit $D = \mathrm{diag}(r_{11}, r_{22}, r_{nn})$

Lemma 3.7 Eine reell symmetrische oder Hermitesche Matrix, die positiv definit ist, ist regulär.

4 Vektorräume

In der Mathematik trifft man vielerorts folgende Struktur an: Die Elemente einer bestimmten Menge lassen sich in natürlicher Weise addieren und mit einer reellen (oder komplexen) Zahl multiplizieren ("strecken"), wobei das Resultat beider Operationen je wieder ein Element der Menge ist und gewisse einfache Regeln gelten. Diese Struktur, genannt Vektorraum oder linearer Raum, kann als Verallgemeinerung des n–dimensionalen Euklidischen Raumes, den wir in Kapitel 2 behandelt haben, aufgefasst werden.

4.1 Definition und Beispiele

Definition Vektorraum Ein Vektorraum V über $\mathbb{E}(:= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ ist eine nichtleere Menge auf der eine Addition

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und eine skalare Multiplikation

$$\alpha \in \mathbb{E}, x \in V \mapsto \alpha x \in V$$

definiert sind, wobei folgende Grundregeln (Axiome) gelten: (jeweils: Vektoren $x, y, z \in V$ und Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$)

V1 $x + y = y + x$
V2 $(x + y) + z = x + (y + z)$
V3 $o \in V$ mit $x + o = x$
V4 $\forall x \exists -x$ mit $x + (-x) = o$; Nullvektor
V5 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
V6 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
V7 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

V8 $1x = x$

Beispiele: $C^m, \mathcal{P}_m, \mathbb{E}, \mathbb{R}, \mathcal{P} := \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m$

Satz 4.1 & 4.2

- $0x = o$
- $\alpha o = o$
- $\alpha x = o \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ oder } x = o$
- $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$
- $\exists z \in V \text{ sd.} x + y = z \text{ und } z = y + (-x)$

Definition Körper Ein Körper $\mathbb{K}$ ist eine nichtleere Menge auf der eine Addition

$$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \mapsto \alpha + \beta \in \mathbb{K}$$

und eine skalare Multiplikation

$$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \mapsto \alpha \cdot \beta \in \mathbb{K}$$

definiert sind, wobei folgende Grundregeln (Axiome) gelten: (jeweils: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$)

K1 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
K2 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
K3 $\exists 0 \in \mathbb{K} \text{ mit } \alpha + 0 = \alpha$
K4 $\forall \alpha \exists - \alpha \text{ mit } \alpha + (-\alpha) = 0$
K5 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
K6 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
K7 $\forall \alpha \exists 1 \in \mathbb{K}, 1 \neq 0 \text{ mit } \alpha \cdot 1 = \alpha$
K8 $\forall \alpha, \alpha \neq 0 \exists \alpha^{-1} \text{ mit } \alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$
K9 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
K10 $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

4.2 Unterraume, Erzeugendensysteme

Definition Unterraum Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum (und ist selbst ein Vektorraum), falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. falls

$$x + y \in U, \alpha x \in U \ (\forall x, y \in U, \forall \alpha \in \mathbb{E})$$

Satz 4.4 Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine relle $m \times n$-Matrix und $\mathcal{L}_0$ die Menge der Lösungsvektoren $x \in \mathbb{R}^n$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = o$, so ist $\mathcal{L}_0$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Definition Linearkombination Es seien V ein Vektorraum über $\mathbb{E}$ und $a_1, \dots, a_\ell \in V$ ausgewählte Vektoren. Ein Vektor der Form

$$x := \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_\ell a_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k a_k$$

mit $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{E}$ heisst Linearkombination von $a_1, \dots a_\ell$.

Definition aufgespannter Unterraum Die Menge aller Linearkombinationen von $a_1, \dots, a_\ell$ heisst der von $a_1, \dots, a_\ell$ aufgespannte (oder erzeugte) Unterraum oder die lineare Hülle von $a_1, \dots, a_\ell$. Er wird bezeichnet mit:

$$\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_\ell\} := \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k a_k \,;\ \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{E} \right\}$$

Der von einer unendlichen Folge oder Menge $S \subset V$ erzeugte Unterraum st gleich der Gesamtheit aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren aus S:

$$\operatorname{span} S := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k a_k \,; m \in \mathbb{N}; a_1, \dots, a_m \in S; \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{E} \right\}$$

Definition Erzeugendensystem Die Vektoren $a_1, \dots, a_\ell$ bzw. die Menge S heissen Erzeugendensystem von $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_\ell\}$ bzw. $\operatorname{span} S$.

Beispiel Die $m + 1$ Monome $1, t, t^2, \dots, t^m$ sind ein Erzeugendensystem des Raumes $\mathcal{P}_m$ aller Polynome vom Grade $\leq m$ und sind linear unabhängig und bilden damit die (Standard-)Basis des Raumes $\mathcal{P}$.

4.3 Lineare Abhängigkeit, Basen, Dimension

Definition linear (un-)abhängig Die Vektoren $a_1, \dots, a_\ell \in V$ heissen linear abhängig, falls es Skalare $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ gibt, die nicht 0 sind und für die gilt:

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_\ell a_\ell = o$$

Andernfalls wird impliziert, dass $\gamma_1 = \cdots = \gamma_\ell = 0$ und damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Definition Basis Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums V heisst Basis von V.

- Die n Einheitsvektoren in $\mathbb{E}^m$ bzw. die **Standardbasis**:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die n Kolonnen $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{E}^n$ einer $n \times n$ Matrix B bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{E}^n$, wenn B regulär ist.

Satz 4.7 Besitzt ein Vektorraum V ein endliches Erzeugendensystem, so besteht jede Basis von V aus derselben Zahl von Vektoren.

Definition Dimension Die Zahl der Basisvektoren (in jeder Basis) eines Vektorraumes V mit endlichem Erzeugensystem heisst Dimension von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet. Ein solcher Raum ist also endlich-dimensional [finite dimensional]. Falls $\dim V = n$ gilt, so sagt man, V sei n–dimensional.

Lemma 4.8 Ist $\{b_1, \dots, b_m\}$ ein Erzeugendensystem von V, so ist jede Menge $\{a_1, \dots, a_\ell\} \subset V$ von $\ell > m$ Vektoren linear abhängig.

Korollar 4.10 In einem Vektorraum V endlicher Dimension ist jede Menge von $n = \dim V$ linear unabhängigen Vektoren eine Basis von V.

Satz 4.11 Jede Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V lässt sich ergänzen zu einer Basis von V.

Satz 4.12 $\{b_1, \dots, b_\ell\} \subset V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn sihc jeder Vektor $x \in V$ in einduetiger Weise als Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$ darstellen lässt:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k$$

Definition Die Koeffizienten ξ_k heissen Koorindaten von x bezüglich der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Der Vektor $\xi = (\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{E}^n$ ist der Koordinatenvektor.

Wird mit Gauss das homogene $n \times k$ LGS für die triviale Lösung aufgelöst und der Rang r bestimmt, so gilt folgendes:

- $r < k \rightarrow$ linear abhängig
- $r = k \rightarrow$ linear unabhängig
- $r = n \rightarrow$ Erzeugendensystem
- $r = k = n \rightarrow$ Basis

4.4 Basiswechsel, Koordinatentransformation

Satz 4.13 Es sei $\xi = (\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n)^{\mathrm{T}}$ der Koordinatenvektor eines bliebenigen Vektors $x \in V$ bezüglich der alten Basis, und es sei $\xi' = (\xi'_1 \quad \cdots \quad \xi'_n)^{\mathrm{T}}$ der Koorindatenvektor deises Vektors x bezüglich der neuen durch

$$b'_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} b_i, k = 1, \dots, n$$

gegeben Basis, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i = x = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k b'_k$$

Dann gilt für diese Koorindatentransformation

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik}\xi'_k\,, i = 1, \dots, n$$

d.h. es ist

$$\xi = T\xi'$$

wobei die Transformationsmatrix T regulär ist, so dass also

$$\xi' = T^{-1}\xi$$

5 Lineare Abbildungen

5.1 Definition, Beispiele, Matrixdarstellung

Definition Es sei $F: X \to Y$ irgendeine Abbldung. Die Menge $F(X)$ der Bildpnkte von F heisst Wertebereich oder Bild von F und wird mit $\operatorname{im} F$ bezeichnet:

$$F(X) = \operatorname{im} F \coloneqq \{F(x) \in Y; x \in X\} \subseteq Y$$

Ist $F(X) = Y$, so ist F eine Abbildung auf Y und heisst auch surjektiv. Gilt

$$F(x) = F(x') \Longrightarrow x = x'$$

so heisst F einduetig oder injektiv. Eine Abbildung, die surjektiv und injektiv ist, heisst eineindeutig auf oder bijektiv. Ist F bijektiv, so ist die inverse Abbildung F^{-1} definiert.

Definition Eine Abbildung $F: X \to Y, x \mapsto Fx$ zwischen zwei Vektorräumen X und Y heisst linear, wenn $\forall x, \tilde{x} \in X$ und $\forall \gamma \in \mathbb{E}$ gilt

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}, F(\gamma x) = \gamma(Fx)$$

X ist der Deinifiotnsraum, Y der Bildraum der Abbildung.

Definition Isomorphismus Eine eineindeutige lineare Abbildung von X auf Y heisst Isomorphismus. Ist $X = Y$, so heisst sie Automorphismus. Ist $F: X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist die inverse Abbildung $F^{-1}: Y \to X$ linear und auch ein Isomorphismus.

Lemma 5.3 Sind X, Y, Z Vektorräume über $\mathbb{E}$ und $F: X \to Y, G: Y \to Z$ linarea Abboildungen, so ist auch $G \circ F: X \to Z$ linear. Sind A, B die Abbildungsmatrizen zu F, G bezüglich der festen Basen in X, Y, Z, so hat $G \circ F$ die Abbildungsmatrix BA.

5.2 Kern, Bild und Rang

Definition Kern Der Kern $\ker F$ von F ist das Urbild von $o \in Y$.

$$\ker F \coloneqq \{x \in X; Fx = o\} \subseteq X$$

- $\ker F$ ist ein Unterraum von X und $\operatorname{im} F$ ist ein Unterraum von Y.
- $\ker A$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = o$
- $\operatorname{im} A$ ist die Menge der rechten Seiten b, für die $Ax = b$ eine Lösung hat.

Satz 5.6 F ist genau dann injektiv, wenn $\ker F = \{o\}$

Satz 5.7 $\dim X - \dim \ker F = \dim \operatorname{im} F \Leftrightarrow \dim X - \dim \ker F = \operatorname{Rang} F$

Korollar 5.8 Folgendes gilt

i) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X$
ii) $F: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X = \dim Y$
iii) $F: X \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X \Leftrightarrow \ker F = o$

Satz 5.9 Zwei Vektorräume endlicher Dimension sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Satz 5.10 Sind $F: X \to Y, G: Y \to Z$ lineare Abbildungen (wobei $\dim X, \dim Y < \infty$), so gilt:

i) $\operatorname{Rang} FG \leq \min\{Rang\ F, Rang\ G\}$
ii) G injektiv $\Longrightarrow \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} F$
iii) F surjektiv $\Longrightarrow \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} G$

Additional

- $\operatorname{im} A \perp \ker A^{\mathrm{T}}$; $u \in \operatorname{im} A, v \in \ker A^{\mathrm{T}}: \langle u, v\rangle = u^{\mathrm{T}}v = 0$

5.3 Matrizen als lineare Abbildungen

Es sei $A = (a_{kl})$ eine $m \times n$-Matrix. Wir bezeichnen ihre n Kolonnen wieder mit $a_1, \dots, a_n$, so dass

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

Definition Der von den Kolonnen von A aufgepsannte Unterraum $\mathcal{R}(A) := span\{a_1, \dots, a_n\}$ heisst Kolonnenraum oder Wertebereich von A. Der Lösungsraum $\mathcal{L}_0$ des homogenen Systems $Ax = o$ heisst Nullraum $\mathcal{N}(A)$.

Satz 5.11 Fasst man die Matrix A als linare Abbildung auf, so ist das Bild von A gleich dem Kolonnenraum doer Werbereich von A und der Kern von A ist gleich dem Nullruam von A:

$$\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A), \ker A = \mathcal{N}(A)$$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar,w enn b im Kolonnen raum von a liegt. Eine allfällige Lsung ist ganau dann eindeuti, wenn $\mathcal{N}(A) = \{o\}$ ist, das heisst das homogenen System nur die triviale Lösung hat.

Satz 5.12 Bezeichnet r den Rang der Matrix A und $\mathcal{L}_0$ den Läösungsraum von $Ax = o$, so ist

$$\dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{N}(A) = \dim \ker A = n - r$$

Satz 5.13 Der Rang einer $m \times n$ Matrix A ist gleich:

i) der Anzahl Pivotelemente bei der Reduktion von A auf Zeilenstufenform;
ii) dem Rang der linearen Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, definiert als $\dim \operatorname{im} A$
iii) der Dimension des Kolonnenraums („Kolonnenrang“), definiert als Anzahl linear unabhängiger Kolonnen ($\in \mathbb{E}^m$)
iv) der Dimension des Zeilenraums (“Zeilenrang”), definiert als Anzahl linear unabhängiger Zeilen $\in \mathbb{E}^n$

Korollar 5.14 $\operatorname{Rang} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{Rang} A^{\mathrm{H}} = \operatorname{Rang} A$

Satz 5.15 Für den Kolonnenraum einer $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\tilde{A}) = \operatorname{span}\{a_{n_1}, \dots, a_{n_r}\}$$

worin $a_{n_1}, \dots, a_{n_r}$ die Pivotkolonnen von A sind und $\tilde{A}$ die daraus gebildete $m \times r$-Matrix bezeichnet.

Satz 5.16 Es seien $A \in \mathbb{E}^{m \times n}, B \in \mathbb{E}^{p \times m}$. Dann gilt:

i) $\operatorname{Rang} BA \leq \min\{Rang\ B, Rang\ A\}$
ii) $\operatorname{Rang} B = m (\leq p) \Longrightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$
iii) $\operatorname{Rang} A = m (\leq n) \Longrightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$

Korollar 5.17 Es seien $A \in \mathbb{E}^{m \times m}, B \in \mathbb{E}^{m \times m}$. Dann gilt:

i) $\operatorname{Rang} BA \leq \min\{Rang\ B, Rang\ A\}$
ii) $\operatorname{Rang} B = m \Longrightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$
iii) $\operatorname{Rang} A = m \Longrightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$

Satz 5.18 Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) A ist invertierbar
ii) A ist regulär
iii) $\operatorname{Rang} \mathrm{A} = \mathrm{n}$
iv) Die n Kolonnenvektoren von A sind linear unabhänigg
v) Die n Zeielnvektoren sind linear unabhängig
vi) $\operatorname{im} \mathrm{A} = \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^n$
vii) $\ker A = \mathcal{N}(A) = \{o\}$
viii) Die lineare Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ ist ein Automorphismus
ix) A ist die Transformationsmatrix einer Koordinatentransformation in $\mathbb{E}^n$

Zusätzlich

Die Idee bei der Transformation einer linearen Abbildung in eine Matrix ist, die Linearität zu benutzen, sprich die Abbildung ist eine Linearkombination der Basen (welche einzeln transformiert werden können).

5.4 Affine Raume und die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems

Definition affiner Teilraum und affine Abbildung Ist U ein echter Utnerraum eines Vektorraumew V und $u_0 \in V$, so heisst die Menge

$$u_0 + U := \{u_0 + u; u \in V\}$$

ein affiner Teilraum. Ist $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung und $y_0 \in V$, so ist

$$H: X \to y_0 + Y, x \mapsto y_0 + Fx$$

eine affine Abbildung.

5.5 Die Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation

- $\dim X = n, \dim Y = m$
- $F: X \to, x \mapsto y$, lineare Abbildung
- $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m, \xi \mapsto \eta$,
  die entsprechende Abbildungsmatrix
- $T: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \xi' \mapsto \xi$,
  eine Transformationsmatrix in $\mathbb{E}^n$
- $S: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m,\ \eta' \mapsto \eta$,
  eine Transformationsmatrix in $\mathbb{E}^m$

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F", "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] & \text{(Koordinaten-abbildung bzgl. “alten” Basen)} \\
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}", "\text{Abb.matrix}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{T}^{-1}"'] & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m \arrow[d, shift right, "\mathbf{S}^{-1}"'] & \text{(Koordinaten bzgl. “alten” Basen)} \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{B}", "\text{Abb.matrix}"'] \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] & \text{(Koordinaten bzgl. “neuen” Basen)}
\end{tikzcd}
$$

(Koordinatentransformation)

6 Vektorraume mit Skalarprodukt

6.1 Normierte Vektorraume

Definition Norm $\|.\|: V \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ hat folgende Eigenschaften:

N1 Positiv definit

$$\|x\| \geq 0\ \forall x \in V$$
$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = o$$

N2 Sie ist dem Betrage nach homogen

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|\ \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{E}$$

N3 Die Dreiecksgleichung gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ein Vektorraum mit Norm heisst normierter Vektorraum.

Verschiedene Normen

- 2-Norm: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- L_1-Norm: $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$
- L_∞-Norm oder Maximumnorm: $\|f\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$

6.2 Vektorraume mit Skalarprodukt

Definition Skalarprodukt Ein Skalarprodukt in einem reellen (=Euklidischen) oder komplexen (=unitären) Vektorraum ist eine Funktionen zweier Variablen

$$\langle .,. \rangle: V \times V \to \mathbb{E}, \qquad x, y \mapsto \langle x, y \rangle$$

mit folgenden Eigenschaften: (jeweils: $x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{E}$)

S1 Es ist **linear** im zweiten Faktor

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$
$$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

S2 Es ist **symmetrisch**

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

S3 Es ist **positiv definit**

$$\langle x, y \rangle \geq 0$$
$$\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$$

S4 S2 für $\mathbb{C}^n$: Es ist **Hermitesch**

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Definition Norm/Länge $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Satz 6.1 Schwarzsche Ungleichung $\forall x, y \in V: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ mit Gleichheit für $\exists \alpha \in \mathbb{E}$ sd. $\alpha x = y$

Definition Winkel Der Winkel $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen zwei Vektoren x, y ist gebebn durch

$$\phi := \arccos \frac{\mathrm{Re}\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Falls $\langle x, y \rangle = 0$ sind die beiden Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander: $x \perp y$.

Satz von Pythagoras $x \perp y \Longrightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

6.3 Orthonormalbasen

Satz 6.3 Eine Menge M von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig, falls $o \notin M$.

Definition orthogonale Basis $\langle b_k, b_l \rangle = 0$ falls $k \neq l$

Definition orthonormiert/orthonormal $\langle b_k, b_k \rangle = 1,\ \forall k$, zusätzlich: $bb^{\mathrm{T}} = 1$

Satz 6.4 Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis, so gilt $\forall x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle b_k, x \rangle}_{=:\xi_k} b_k$$

Das heisst für die Koordinaten bezüglich einer Orthonormalbasis gilt einfach $\xi_k = \langle b_k, x \rangle$.

Satz 6.5 Parsevalsche Formel Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt mit $\xi_k := \langle b_k, x \rangle$ und $\eta_k := \langle b_k, y \rangle$, $(k = 1, \dots, n)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} \eta_k = \xi^{\mathrm{H}} \eta = \langle \xi, \eta \rangle$$

das heisst, das Skalarprodukt zwei Vektoren in V ist gleich dem (Euklidische) Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren in $\mathbb{E}^n$. Insbesondere gilt:

$$\|x\| = \|\xi\|, \qquad \angle(x, y) = \angle(\xi, \eta), \qquad x \perp y \Leftrightarrow \xi \perp \eta$$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren Es sei $a_1, a_2, \dots\}$ eine endliche oder abzählbare, linear unabhängige Menge von Vektoren. Wir berechnen eine gleich grosse Menge $\{b_1, b_2, \dots\}$ von Vektoren gemäss

$$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$\tilde{b}_k := a_k - \sum_{j=1}^{(k-1)} \langle b_j, a_k \rangle\, b_j\,, \qquad (k = 2, 3, \dots)$$

$$b_k := \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|}, \qquad (k = 2, 3, \dots)$$

$b_1, b_2, \dots$ sindnormierund paarweise orthgonal und

$$\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

Zusätzlich: **Beachte** das Minus vor der Summe gilt für jeden Term!

Um einen Vektor in der neuen Basis darzustellen, gilt folgendes: $v \in V: v = \sum_i x_i b_i \to v = \sum_j x_j' b_j'$ wobei $x_i' = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} x_j$ mit $T =$ Transformationsmatrix

Korollar 6.7 Zu einem Vektorraum mit Skalarprodukt von endlicher oder abzählbar unendlicher Dimension gibt es eine orthonormierte Basis.

6.4 Orthogonale Komplemente

Korollar 6.8 In einem Vektorraum endlicher Dimension mit Skalarprodukt kann man jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthonormalen Basis ergänzen.

Definition orthogonales Komplement In einem endlich-dimensionalen Vektorraums V mit Skalarprodukt heisst der zu einem echten Unterraum U orthogonale komplementäre Unterraum das orthogonale Komplement von U und wird mit $U^{\perp}$ bezeichnet.

$$U^{\perp} := \{x \in V; x \perp U\}$$
$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$$

Als Anwendung. In $\mathbb{R}$ (für $\mathbb{C}$: $A^T = A^H$):

$$x \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Ax = o \Leftrightarrow x \perp \mathcal{R}(A^T) \Leftrightarrow x \in \left(\mathcal{R}(A^T)\right)^{\perp}$$

Satz 6.9 Für eine komplexe $m \times n$-Matrix mit Rang r gilt: (für $\mathbb{R}$: $A^H = A^T$):

$$\mathcal{N}(A) = \left(\mathcal{R}(A^H)\right)^{\perp} \subset \mathbb{E}^n, \qquad \mathcal{N}(A^H) = \left(\mathcal{R}(A)\right)^{\perp} \subset \mathbb{E}^m$$
$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H) = \mathbb{E}^n, \qquad \mathcal{N}(A^H) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^m$$

$$\dim \mathcal{R}(A) = r, \qquad \dim \mathcal{N}(A) = n - r$$
$$\dim \mathcal{R}(A^H) = r, \qquad \dim \mathcal{N}(A^H) = m - r$$

6.5 Orthogonale und unitäre Basiswechsel und Koordinatentransformationen

Satz 6.10 & Satz 6.11 Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist unitär ($\mathbb{C}$) bzw. orthogonal ($\mathbb{R}$). Für $b'_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} b_i\,,\ k = 1, \dots, n$ gilt folgende Verknüpfung der Kooridnatenvketoren

$$\xi = T\xi', \qquad \xi' = T^H \xi$$

Korollar 6.12

$$\langle \xi', \eta' \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$
$$\|\xi'\| = \|\xi\|, \qquad \angle(\xi', \eta') = \angle(\xi, \eta), \qquad \xi' \perp \eta' \Leftrightarrow \xi \perp \eta$$

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F", "\text{lin. Abb.}"'] \arrow[d, shift right, "\kappa_X"'] & z \in Y \arrow[d, shift right, "\kappa_Y"'] & \text{Vektorräume mit Skalarprodukt} \\
\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{A}", "\text{Abb.matrix}"'] \arrow[u, shift right, "\kappa_X^{-1}"'] & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "\kappa_Y^{-1}"'] & \text{Koordinaten bzgl. “alten” Orthonormalbasen in } X \text{ und } Y \\
\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\mathsf{H}} \arrow[d, shift right] & \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{\mathsf{H}} \arrow[d, shift right] & \\
\mathbf{T} \arrow[u, shift right] & \mathbf{S} \arrow[u, shift right] & \\
\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "\mathbf{B}", "\text{Abb.matrix}"'] & \boldsymbol{\eta}' \in \mathbb{E}^m & \text{Koordinaten bzgl. “neuen” Orthonormalbasen in } X \text{ und } Y
\end{tikzcd}$$

6.6 Orthogonale und unitäre Abbildungen

$$\langle x', y' \rangle = \langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle$$

Satz 6.13 Für eine orthogonale (unitäre) Abbildung $F: X \to Y$ gilt:

i) Längentreu $\|Fx\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in X$
ii) Winkeltreu $x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy$
iii) Injektiv $\ker F = \{o\}$

Für zusätzlich $\dim X = \dim Y < \infty$:

iv) F ist ein Isomorphismus
v) Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von X, so ist $Fb_1, \dots Fb_n\}$ eine Orthonormalbasis von Y
vi) F^{-1} ist unitär (orthogonal)
vii) Die Abbildungsmatrix A ist bezüglich orgnonmierten Basen in X, Y unitär (orthogonal).

Lemma 6.14 Sind $F: X \to Y$ und $G: Y \to Z$ zwei unitäre (oder orthogonale) Isomorphismen endlich-dimensionaler unitärer (bzw. orthogonaler) Vektorräume, so auch $G \circ F: X \to Z$.

Lemma 6.15 Ist V ein n–dimensionaler unitärer (oder orthogonaler) Vektorraum mit Orthonormalbasis, so ist die Koordinatenabbildung $K_V: V \to \mathbb{C}^n$ (bzw. $V \to \mathbb{R}^n$) ein unitärer (bzw. orthogonaler) Isomorphismus.

Lemma 6.16 Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{R}^{n \times n}$) ist genau dann unitär (bzw. orthogonal), wenn die lineare Abbildung $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (bzw. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) unitär (bzw. orthogonal) ist.

6.7 Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen

Definition beschränkt Es seien X, Y zwei nromierte Vektoräume mit den Normen $\|.\|_X, \|.\|_Y$. Eine lineare Abbildung $F. X \to Y$ heisst beschränkt, wenn es ein $\gamma_F \geq 0$ gibt mit

$$\|F(x)\|_Y \leq \gamma_F \|x\|_X, \qquad \forall x \in X$$

Die Gesamtheit solcher linearer Abbildungen (Operatoren) F zwischen X und Y heisst $\mathcal{L}(X, Y)$.Darin definiert sind:

$$F + G: x \in X \mapsto (F + G)(x) := Fx + Gx, \qquad \forall F, G \in \mathcal{L}(X, Y)$$
$$\alpha F: x \in X \mapsto (\alpha F)(x) := \alpha Fx, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{E}, \forall F \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Definition induzierte Operatornorm

$$\|.\|: \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}, F \mapsto \|F\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} \Leftrightarrow \|F\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Fx\|_Y$$

Definition induzierte Matrixnorm

$$\|.\|: \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Leftrightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition Spektralnorm/2-Norm

$$\|A\|_2; = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \Leftrightarrow \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

Satz 6.18 Die induzierte Operatornorm hat die folgenden Eigenschaften:

OpN1 Positiv definit

$$\|F\| \geq 0, \qquad \forall F \in \mathcal{L}(X,Y)$$
$$\|F\| = 0 \Longrightarrow F = O$$

OpN2 Dem Betrage nach homogen

$$\|\alpha F\| = |\alpha|\|F\|, \qquad \forall F \in \mathcal{L}(X,Y), \forall \alpha \in \mathbb{E}$$

OpN3 Dreiecksungleichung

$$\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|, \qquad \forall F,G \in \mathcal{L}(X,Y)$$

OpN4 Für zusammengesetzte Abbildungen gilt

$$\|G \circ F\| \leq \|G\|\|F\|, \qquad \forall F \in \mathcal{L}(X,Y), G \in \mathcal{L}(Y,Z)$$

OpN5 Kompatibel mit den Vektornormen in X, Y

$$\|Fx\|_Y \leq \|F\|\|x\|_X, \qquad \forall F \in \mathcal{L}(X,Y), \forall x \in X$$

Definition Matrixnorm

$$\|.\|: \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \|A\|$$

mit

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \qquad \forall A \in \mathbb{E}^{n\times n}, x \in \mathbb{E}^n$$

Definition Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2}$$

Definition (2-Norm-)Konditionszahl

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$
$$K_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$$

7 Die Methode der kleinsten Quadrate und die QR–Zerlegung einer Matrix

7.1 Orthogonalprojektionen

Definition Eine lineare $P: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ heisst Projektion oder Projektor, falls

$$P^2 = P$$

Eine Projektion heisst Orthogonalprojektion oder orthogonaler Projektor, falls zusätzlich gilt

$$\ker P \perp \operatorname{im} P \text{ d.h. } \mathcal{N}(P) \perp \mathcal{R}(P)$$

Andernfalls ist es eine schiefe Projektion.

Lemma 7.1 Ist P ein Projektor, so ist auch $I - P$ ein Projektor und es gilt:

$$\operatorname{im} I - P = \ker P, \ker I - P = \operatorname{im} P$$

Satz 7.2 Für einen Projektor $P: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) P ist ein orthogonaler Projektor
ii) $I - P$ ist ein orthogonaler Projektor
iii) $P^H = P$

Lemma 7.3 Sind die Kolonnen einer $m \times n$-Matrix A linear unabhängig ($\Rightarrow \operatorname{Rang} A = n (\leq m)$), so ist $A^H A$ regulär.

Satz 7.4 Die Orthogonalprojektion $P_A: \mathbb{E}^m \to \operatorname{im} A \subseteq \mathbb{E}^m$ auf den Kolonnenraum $\mathcal{R}(A) \equiv \operatorname{im} A$ einer $m \times n$-Matrix A mit $\operatorname{Rang} n\ (\leq m)$ ist gegeben durch

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H$$

Korollar 7.5 Die Orthogonalprojektion $P_Q: \mathbb{E}^m \to \operatorname{im} Q \subseteq \mathbb{E}^m$ auf den Kolonnenraum $\mathcal{R}(Q) \equiv \operatorname{im} Q$ einer $m \times n$-Matrix $Q = (q1 \quad \cdots \quad q_n)$ mit orthongonalen Kolonnen ist gegeben durch

$$P_Q := QQ^H$$

Es gilt also für jedes $y \in \mathbb{E}^m$

$$P_Q y = QQ^H y = \sum_{j=1}^{n} q_j q_j^H y = \sum_{j=1}^{n} q_j \langle q_j, y \rangle$$

Satz 7.6 Für eine Orthogonalprojektion P gilt

$$\|y - Py\|_2 = \min_{z \in \operatorname{im} P} \|y - z\|_2$$

Zusätzlich:

7.1.1 Beispiele

- Givens-Rotation: Drehung um φ um die z-Achse im gegen UZS: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Orthogonale Projektion auf y-Achse: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Orthogonale Projektion auf yz-Ebene mit Streckung um $\alpha > 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
- Orthogonale Projektion auf yz-Ebene mit Streckung um 4 und Spiegelung von y in xz-Ebene: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

Satz 7.7 Es sei $A \in \mathbb{E}^{m \times n}, \operatorname{Rang} A = n \leq m, y \in \mathbb{E}^m$. Dann hat das überbestimmte Gleichungssystem $Ax = y$ eine eindutig bestimmte Lösung x im Sinne der kleinsten Quadrate, d.h. x mit

$$\|Ax - y\|^2 = \min_{\tilde{x} \in \mathbb{E}^n} \|A\tilde{x} - y\|^2$$

x kann berechnet werden durch Lösen des regulären Systems der Normalgleichungen, welche lautet: $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} y$. Der Residuenvektor $r := y - Ax$ steht senkrecht auf $\mathcal{R}(A)$.

Beispiel: Sollen die Werte $(x_i, y_i), i = 1 \ldots n$ in ein Polynom zweiten Grades $ax^2 + bx + c$ angepasst werden, so hat die Matrix A folgende Gestalt $A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n^1 & x_n^0 \end{pmatrix}$, $y = (y_1 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}$, $x = (a \quad \cdots \quad n)^{\mathrm{T}}$.

Lemma 7.8 Unter den Voraussetzungen von Satz 7.7 kann man die Kleinste-Quadrate-Lösung x bestimmen, indem man die Kolonnen $a1, \ldots a_n$ von A und den Vektor $a_{n+1} := y$ dem Schmidtschen Orthogonalisierungsprozess unterwirft und so das Lot

$$\tilde{q}_{n+1} := y - Ax = r \perp \mathcal{R}(A)$$

von y auf $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ bestimmt. Das Gleichungssystem $Ax = y - \tilde{q}_{n+1}$ ist dann exakt nach x auflösbar.

7.3 Die QR–Zerlegung einer Matrix

$$q_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}, \qquad \tilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle, \qquad q_k := \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|}, \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

$$a_1 = q_1 \|a_1\|, \qquad a_k = q_k \|\tilde{q}_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} q_j \langle q_j, a_k \rangle, \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

$$r_{11} := \|a_1\|, \qquad r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle, \qquad r_{kk} := \|\tilde{q}_k\|, \qquad j = 1, \ldots, k-1; k = 2, \ldots, n$$

$$a_k = q_k r_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} q_j r_{jk} = \sum_{j=1}^{k} q_j r_{jk} = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{jk}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$A := (a_1 \quad \cdots \quad a_n), \qquad Q = (q_1 \quad \cdots \quad q_n), \qquad R := \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Definition QR-Faktorisierung Die Zerlegung $A = QR$ einer $m \times n$ Matrix A mit Maximalrang $n \leq m$ in eine $m \times n$ Matrix Q mit orthonormalen Kolonnen mal eine $n \times n$ Rechtdreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen heisst QR–Faktorisierung von A.

Definition QR-Zerlegung: Die Zerlegung $A = QR = (Q \quad Q_{perp}) \binom{R}{O} = \tilde{Q}\tilde{R}$ einer $m \times n$ Matrix A mit Maximalrang $n \leq m$ in eine unitäre (orthogonale) $m \times n$ Matrix $\tilde{Q}$ mal eine (rechteckige) $m \times n$ Rechtdreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen heisst QR–Zerlegung von A.

Satz 7.9 Das Gram-Schmidt-Verfahren, angewandt auf die Kolonnen $a1, \dots, a_n$ einer $m \times n$-Matrix A lieftert die QR-Faktorisierung dieser Matrix. Ergänz man A durch den m-Vektor y, so liefert das Verfharen (vor dem Normieren) zusätzlich den zu $\mathcal{R}(A)$ orthononalen Residuenvektor r gemäss der Formel

$$r = y - \sum_{j=1}^{n} q_j \langle q_j, y \rangle = y - QQ^H y$$

Die Lösung x des Kleinste-Quadrate-Problems erfüllt das durch Rückwärtseinsetzen lösbare System

$$Rx = Q^H y$$

7.4 Die QR–Zerlegung mit Pivotieren

8 Determinanten

8.1 Permutationen

Definition Permutation & Transposition Eine Permutation von n Elementen ist eine eineindeutige Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich. Die Menge aller dieser Permutationen sei S_n. Eine Transposition ist eine Permutation, bei der nur zwei Elemente vertauscht werden.

Satz 8.1 Es gibt $n!$ Permutationen in S_n.

Definition Signum $\operatorname{sign} p = \begin{cases} +1, & \text{falls } |\text{Transpositionen}| \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } |\text{Transpositionen}| \text{ ungerade} \end{cases}$

8.2 Determinante: Definition, Eigenschaften

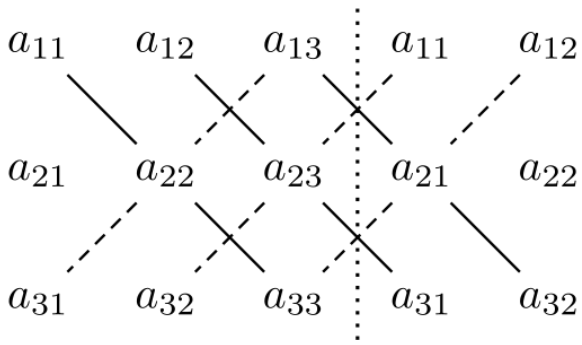
Definition Determinante

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign} p \cdot a_{1,p(1)} a_{2,p(2)} \cdots a_{n,p(n)} = |A|$$

Regel von Sarrus

$$\det a_{11} = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$



Satz 8.3 & Satz 8.4 mit Korollar 8.10 Obige Definition der Determinante ist ein Funktional $\det \quad : \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{E},\ A \mapsto \det A$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\det$ ist eine lineare Funktion jeder einzelnen Zeile (bzw. Kolonne) der Matrix.
ii) Werden in A zwei Zeilen (bzw. Kolonnen) vertauscht, so wechselt $\det A$ das Vorzeichen.
iii) $\det I = 1$
iv) Hat A ein Zeile (bzw. Kolonne) aus lauter Nullen, so ist $\det A = 0$
v) $\det \gamma A = \gamma^n \det A$
vi) Hat A zwei gleiche Zeilen (bzw. Kolonnen), so ist $\det A = 0$

vii) Addiert man zu einer Zeile (bzw. Kolonne) von A ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Kolonne) von A, so ändert sich der Wert von $\det A$ nicht.
viii) Ist A eine Diagonalmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.
ix) Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

Satz 8.5[1] Für jede $n \times n$-Matrix A gilt

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = n \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existiert} \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung} \Leftrightarrow Ax = b \text{ ist für jedes } b \text{ eindeutig lösbar} \Leftrightarrow \text{Zeilen und Spalten sind linear unabhängig}$$

$$\det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ ist singulär} \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ hat } \infty \text{ Lösungen} \Leftrightarrow Ax = b \text{ hat } 0 \text{ oder } \infty \text{ Lösungen}$$

Wendet man auf A den Gauss-Algorithmus an und ist dabei $\operatorname{Rang} A = n$, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Pivotelemente multipliziert mit $(-1)^\nu$, wobei, ν die Anzahl der ausgeführten Zeilenvertauschungen bezeichnet:

$$\det A = (-1)^\nu \prod_{k=1}^{n} r_{kk}$$

Satz 8.7 $\det AB = \det A \cdot \det B$

Korollar 8.8 A regulär: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Satz 8.9 $\det A^T = \det A$, $\det A^H = \overline{\det A}$

8.3 Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen

Definition Kofaktor Zu jedem Element a_{kl} einer $n \times n$-Matrix A werde die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix $A_{[k,l]}$ definiert durhc Streichen der Zeiel k und der Kolonne l von A. Der Kofaktor K_{kl} von a_{kl} ist dann die Zahl

$$K_{kl} := (-1)^{k+l} \det A_{[k,l]}$$

Lemma 8.11 Es sei A eine Matrix, in deren l–ter Kolonne nur das Element $a_{kl} \neq 0$ ist. Dann gilt

$$\det A = a_{kl} K_{kl}$$

Satz 8.12 Ist A eine $n \times n$-Matrix, so gelten für jedes feste $k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, n\}$ die Formeln

$$\underbrace{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{kli} K_{ki}}_{\text{Entwicklung nach der } k\text{–ten Zeilen}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{il} K_{il}}_{\text{Entwicklung mach der } l\text{–ten Kolonne}}$$

8.4 Determinanten von Blockdreiecksmatrizen

Satz 8.13 Für 2×2Blockmatrizen gilt:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \det A \det D \quad \text{bzw.} \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det D$$

9 Eigenwerte und Eigenvektoren

9.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen und linearen Abbildungen

Definition Eigenwert & Eigenvektor Die Zahl $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst Eigenwert der lienaren Abbildung $F: X \to Y$, falls es einen Eigenvektor $v \in V, v \neq o$ gibt, so dass

$$Fv = \lambda v$$

Ist λ ein Eignwert,so ist der zugehörige EInegraum E_λ gleich der um den Nullvektor erweiterten Menge der Eigenvektoren zu λ:

$$E_\lambda := \{v \in V; Fv = \lambda v\}$$

Lemma 9.1 $Fv = \lambda v \Leftrightarrow A\xi = \lambda \xi$

Lemma 9.2 $E_\lambda = \ker F - \lambda I$

Definition geometrische Vielfachheit (GV) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ ist gleich der Dimension von E_λ.

Falls $\sum_i GV = n \to A$ besitzt eine Eigenbasis.

Korollar 9.3 λ ist genau dann ein Eigenwert von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, wenn $A - \lambda I$ singulär ist.

[1] Ergänzt mit Wissen aus Übung

$$\underbrace{E_\lambda = \ker A - \lambda I}_{\text{Eigenraum}} \qquad \underbrace{(A-\lambda I)v = o}_{\text{Lösungen } v \text{ des homogenen GS}} \qquad \underbrace{\dim E_\lambda = \dim\ker A - \lambda I = n - \operatorname{Rang} A - \lambda I}_{\text{geometrische Vielfachheit}}$$

Definition charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) \coloneqq \det A - \lambda I = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A\,(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A$

Definition charakteristisches Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$

Definition Spur/Trace $\operatorname{Spur} A = \operatorname{tr} A \coloneqq a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}\,;\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}B_{ij}\,;\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$

Satz 9.5 $\lambda \in \mathbb{E}$ ist genau dann Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$,wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A ist, das heisst eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Definition algebraische Vielfachheit (AV) Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

$$\sum_i AV = n$$

Es gilt: $1 \leq \mathrm{GV}\,\lambda^* \leq \mathrm{AV}\,\lambda^*$

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren via charakteristisches Polynom Um die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu bestimmen, kann man theoretisch wie folgt vorgehen:

1. Berechne
$$\chi_A(\lambda) \coloneqq \det A - \lambda I$$
2. Berechnen der n Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von χ_A. Die Vielfachheit einer Nullstelle ist gleich der algebraischen Vielfachheit dieses Eigenwertes.
3. Für jeden verschiedenen Eigenwert λ_k: Bestimmung einer Basis des Kernes von $A - \lambda_k I$, des Eigenraumes zu λ_k. Das heisst Berechnung (maximal vieler) linear unabhängiger Lösungen des singulären homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_k I)v = o$ Dazu reduziert man $A - \lambda_k I$ mit dem Gauss-Algorithmus auf Zeilenstufenform und wählt von den $n - r$ freien Parametern der Reihe nach immer einen $\neq 0$ und die anderen 0. Die Dimension $n - r$ des Lösungsraumes ist gleich der geometrischen Vielfachheit dieses Eigenwertes.

9.2 Ähnlichkeitstransformationen; die Eigenwertzerlegung

Satz 9.7 Ähnliche Matrizen ($A \mapsto B = T^{-1}AT$) haben dasselbe charakteristische Polynom; sie haben also die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte. Sowohl die geometrische als auch die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist bei ähnlichen Matrizen gleich.

Satz 9.9 Zu einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gibt es genau dann eine ähnliche Diagonalmatrix Λ, wenn es eine Eigenbasis von A gibt. Für die reguläre Matrix

$$V \coloneqq (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$$

mit dieser Eigenbasis als Kolonnen gilt dann

$$AV = V\Lambda, \qquad \text{d.h.}\, A = V\Lambda V^{-1}$$

Gibt es umgekehrt eine reguläre Matrix $V \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n}$, so dass die letzte Gleichung gilt, so sind die Diagonalelemente von Λ Eigenwerte von A und die Kolonnen von V entsprechende Eigenvektoren, die eine Eigenbasis bilden.

Definition Spektralzerlegung/Eigenwertzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$, falls ein diagonales Λ existiert, heisst A diagonalisierbar.

Korollar 9.10 $A = \sum_{k=1}^n v_k \lambda_k w_k^{\mathrm{T}}$

Für eine $n \times n$-Matrix sind äquivalent:

- Halbeinfach: $AV = GV,\ \forall\lambda^*$
- Besitzt eine Eigenbasis
- Ist diagonalisierbar

In den Spalten von V sthen die Eigenvektoren von A (falls sie eine Eigenbasis bilden). Die dazugehörigen Eigenwerte stehen in der Hauptdiagonale von Λ an der gleichen Position.

9.3 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Satz 9.15 Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch, so gilt

i) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n$
iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, \dots, u_n$ von A
iv) Für die unitäre Matrix $U := (u_1 \quad \cdots \quad u_n)$ gilt

$$U^{\mathrm{H}} A U = \Lambda := \operatorname{diag} \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

Korollar 9.16 Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so gilt:

i) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{R}^n$
iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, \dots, u_n$ von A
iv) Für die orthogonale Matrix $U := (u_1 \quad \cdots \quad u_n)$ gilt

$$U^{\mathrm{T}} A U = \Lambda := \operatorname{diag} \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

9.4 Die Jordansche Normalform

$$A = VJV^{-1}$$

$$J := \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_\mu \end{pmatrix}, \qquad J_k = (\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

10 Anwendungen der Eigenwertzerlegung

Verfahren

1. DGL in Form $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \dot{y} = Ay$ bringen
2. D und T für A bestimmen $A = TDT^{-1}$
3. $\dot{x} = Dx$ ist ein entkoppeltes System
4. $x_i = c_i \cdot e^{\lambda_i t}$
5. $y = Tx$
6. $y(0) = T \cdot x(0) = T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot y(0)$

10.1 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

10.2 Funktionen von Matrizen

10.3 Reelle lineare Differentialgleichungen mit komplexen Eigenwerten

10.4 Quadratische Formen und ihre Hauptachsentransformation

$$Q(x_1, \dots, x_n)$$

Ellipse: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$; nach links und rechts geöffnete Hyperbel mit reeller Halbachse a und Asymptotensteigung $\pm \arctan b/a$: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$; nach oben geöffnete Parabel mit Halbparameter p: $x_1^2 - 2px_2 = 0$; Ellispoid: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; einschaliges Hyperboloid: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$

Symmetrische bilineare (Hermitesch) Form $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto B(x, y) := x^{\mathrm{T}} A y \in \mathbb{R}$

Quadratische Form $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Q(x) := x^{\mathrm{T}} A x \in \mathbb{R}$

Hauptachsen-Darstellung Mit $A = U \Lambda \mathrm{U}^{\mathrm{T}}, \tilde{x} := U^{\mathrm{T}} x$ ist $Q(x) = \tilde{Q}(\tilde{x}) := \tilde{x}^{\mathrm{T}} \Lambda \tilde{\mathrm{x}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{x}_k^2$

Satz 10.2 Jede quadratische $Q(x) = x^{\mathrm{T}} A x$ lässt sich mittels einer auf der Spektralzerlegung von A beruhenden orthogonalen Basistransformation auf die Hauptachsen-Darstellung bringen.

Korollar 10.3 Basisübergang mit zu Basis (orthogonal, aber nicht unbedingt orthonormiert)mit Koordinaten y: $Q(x) = y^{\mathrm{T}} I_{\pm} y = \sum_{k=1}^{p} y_k^2 - \sum_{l=p+1}^{r} y_l^2$. p ist die Anzahl positiver Eigenwerte, $r = \operatorname{rank} A$, $r - p$ die Anzahl negativer

Eigenwerte, $I_{\pm} := \operatorname{diag}\left(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, \underbrace{(-1,\dots,-1)}_{r-p}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-r}\right)$. Das Tripel $(p, r-p, n-r)$ ist die **Trägheit** von A. $p-(r-p)$ ist die **Signatur** von A.

Kongruent falls $A = SBS^{\mathrm{T}}$, wobei $S := UD$ und $D := \operatorname{diag}\left(\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, \sqrt{|\lambda_n|}\right)$, $A, B: n \times n$

Satz 10.5 Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

10.5 Quadratische Funktionen

10.6 Die Spektralnorm

11 Die Singularwertzerlegung

11.1 Die Singulärwertzerlegung: Herleitung

Definition Singulärwertzerlegung Die Matrixfaktorisierung

$$A = U\Sigma V^H = \sum_{k=1}^{r} u_k \sigma_k v_k^H$$

heisst Singulärwertzerlegung (SVD). Wobei:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat Diagonalgestalt, $\Sigma = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } m \geq n \\ \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } m \leq n \end{cases}$

Die Zahlen

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min\{m,n\}} = 0$$

heissen Singulärwerte von A, $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_r, r = \operatorname{Rang} A$.

- U besteht aus den orthonormalisierten (Gram-Schmidt) Eigenvektoren von AA^{T}
- V besteht aus den orthonormalisierten (Gram-Schmidt) Eigenvektoren von $A^{\mathrm{T}}A$ und wird am Schluss noch transponiert
- Σ besteht aus den Quadratwurzeln der Eigenwerte von AA^{T} bzw. $A^{\mathrm{T}}A$ (spielt keine Rolle) bzw. den Singulärwerten von A

11.2 Die Singulärwertzerlegung: Folgerungen

Korollar 11.3 Die Unterräume $\mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A^H)$ sindzueindander orthongoal und spannen zusammen den Bildraum$\mathbb{E}^m$ auf. Analog sind die Unterräume $\mathcal{R}(A^H), \mathcal{N}(A)$ zueinander orthogonal und spannen den Definitionsraum $\mathbb{E}^n$ auf.

Korollar 11.4 Es sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $\operatorname{Rang} A = r$. Dann sind die r positiven EIgnewerte von $A^H A$ und AA^H gleich, aber die Vielfachheit des Eigenwertes 0 ist $n-r$ bzw. $m-r$.

12 Zusätzlich

12.1 Maschinengenauigkeit

Für einen Computer, der mit Maschinenzahlen der Form $x = \pm b.bbb \times 2^{\pm bb}, b \in \{0,1\}$ rechnet, gilt folgendes:

- $realmax = 1.111 * 2^{11} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) * 2^3 = \frac{15}{8} * 8 = 15$
- $realmin = 1.000 * 2^{-11} = 1 * 2^{-3} = 1 * \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$
- $knpz = 0.001 * 2^{-11} = \frac{1}{8} * \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$
- $eps = 1.000 * 2^{-11} = \frac{1}{8}$
- $eps * realmin = knpz$