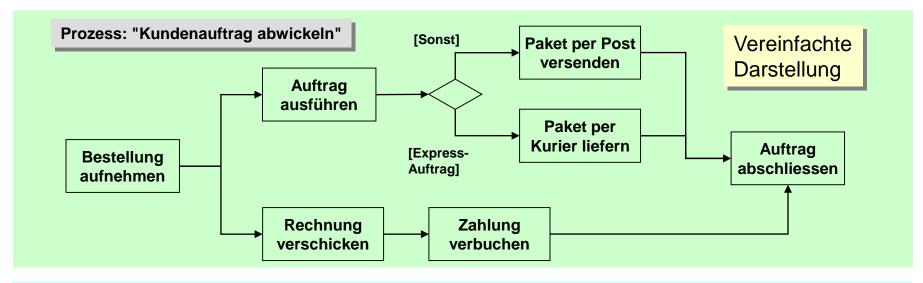
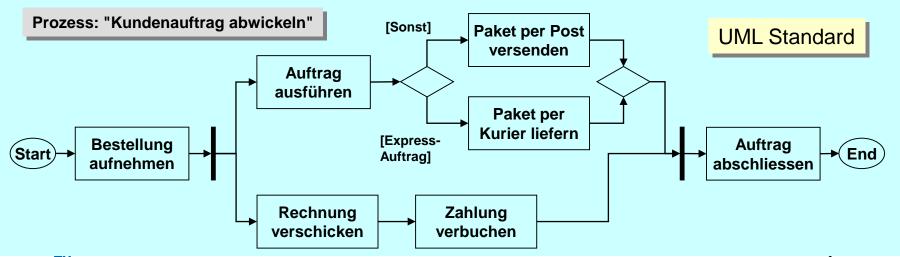
KAPITEL 2

MQMO

© R. Wüst, A. Klinkert, H. Gröflin

Bsp: Aktivitätsdiagramm





āw

_

Formel von Little:

$$N = \lambda \cdot W$$

- Fundamentaler Zusammenhang in der quantitativen Prozessanalyse!
 - Gültig unter sehr allgemeinen Bedingungen
 - Das "Ohm'sche Gesetz" der Prozessanalyse.
- Wichtige Bedeutung auch im Operations Management:

$$WIP = TH \cdot CT$$

WIP: (Mean) Work in Process ("(mittlere) Ware-In-Arbeit, WIA")

TH: (Mean) Throughput ("(mittlerer) Durchsatz", "(mittlere) Produktionsrate")

CT: (Mean) Cycle Time ("(mittlere) Durchlaufzeit, DLZ")

Begriff der Auslastung

- Auch: Auslastungsgrad, Kapazitätsauslastungsgrad, ...
- Auslastung einer Ressource (eines Prozesses):

Auslastung =
$$\frac{\text{Genutzte Kapazität (Kapazitätsbedarf)}}{\text{Nutzbare Kapazität}}$$

- Beachte: Auslastung ist Anteil der Zeit, zu welchem eine Ressource genutzt wird.
- Masseinheit für Auslastung: einheitslos (z.B. %)
- Bottleneck eines Routings: Teilprozess mit grösster Auslastung
- Beachte auch: Auslastung $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\text{Throughput}}{\text{Nutzbare Kapazität}}$ Gilt immer: $\rho < 1$
- Bei mehreren Objekttypen $i \in I$:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$
 Auslastung bzgl. Objekttyp (Produkt) *i*

KAPITEL 3



3.1 Einführung und Grundlagen

A. Ankunftsprozess

- Die Ankünfte der Kunden bilden einen stochastischen Prozess, welcher i.a. beschrieben wird durch die Zeitintervalle zwischen zwei aufeinander folgenden Ankünften:
 Zwischenankunftszeit ("Interarrival Time", IAT)
- Es wird angenommen, dass die Zwischenankunftszeiten Zufallsvariablen darstellen, welche **unabhängig und gleichverteilt** (*i.i.d.* = *independent and identically distributed*) mit gegebener Verteilung sind.
- Zur Klassifikation dieser Verteilungen wird folgende Notation verwendet:

M: Exponential-Verteilung (Markovian, Memoryless)

D : konstante Verteilung (Deterministic)

G: Beliebige Verteilung (**G**eneral).

Man findet auch die Notation GI (General Independent).

und weitere



Notation von Kendall:

- D.G. Kendall hat eine Notation vorgeschlagen (die von vielen Autoren aufgegriffen wurde), bei welcher eine Warteschlange mit einer symbolischen Formel beschrieben wird.
- Die einfachste Form dieser Notation ist

$$A \mid B \mid s$$

wobei:

- A Verteilung der Zwischenankunftszeiten, $(A \in [M, D, G])$
- B Verteilung der Bedienzeiten, $(B \in [M, D, G])$
- s Anzahl Bedienstationen, $(s \in [1,2,...,n])$

3.1 Einführung und Grundlagen

Kendall Notation: Bei Verwendung dieser einfachen Notation werden folgende Annahmen gemacht:

- die Menge (Population) der Klienten, welche in das System eintreten können, ist unbeschränkt
- die Anzahl der Klienten, welche sich in der Warteschlange befinden können, ist unbeschränkt
- die Warteschlangen-Disziplin ist FIFO

Erweiterte Form der Notation von Kendall:

A | B | s | K | P | DS

K: Kapazität der Warteschlange

(Anzahl Warteplätze + Anzahl Bedienstationen)

P: Grösse der Population

DS: Warteschlangen-Disziplin (Service-Disziplin)



3.1 Einführung und Grundlagen

Leistungsmasse und interessierende Fragen:

 In einem System mit einer einzigen Warteschlange und einer oder mehreren Bedienstationen werden die folgenden Leistungsmasse (Kennzahlen) am häufigsten benutzt:

		Bezeichnung
•	Anzahl Kunden im System	N
	(an Warteposition oder in Bedienung)	
•	Anzahl Kunden in Warteschlange	\mathbf{N}_{q}
•	Aufenthaltszeit eines Kunden im System	\mathbf{W}
•	Wartezeit eines Kunden in Warteschlange	$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}$

- Diese Grössen sind Zufallsvariablen, deren Erwartungswert, Verteilung,
 Quantile, etc. abgeschätzt werden
- Im Allgemeinen sind diese Grössen von der Zeit t abhängig und zu deren Abschätzung ist es einfacher, wenn sich das System in einem stationären (Gleichgewichts-) Zustand befindet



Überblick: Beschreibende Parameter

```
\lambda (mittlere) Ankunftsrate

1/\lambda (mittlere) Zwischenankunftszeit

\mu (mittlere) Bedienrate (entspricht "Kapazität" einer Arbeitsstation)

1/\mu (mittlere) Bedienzeit

s Anzahl Arbeitsstationen
```

Davon abgeleitete Grösse:

 ρ (mittlere) Auslastung

(auch: Auslastungsgrad, Ausnutzungsgrad, Verkehrsintensität, ...)

Es gilt:

$$\rho = \frac{\lambda}{s_{II}}$$
 allgemein bei $s \ge 1$ Arbeitsstationen

$$\rho = \frac{\lambda}{u}$$
 speziell bei $s = 1$ Arbeitsstation



3.1 Einführung und Grundlagen

Überblick: Leistungskennzahlen

E[N]	(mittlere) Anzahl Kunden im System
$E[N_q]$	(mittlere) Anzahl Kunden in Warteschlange
E[W]	(mittlere) Aufenthaltszeit eines Kunden im System
$E[W_q]$	(mittlere) Aufenthaltszeit eines Kunden in Warteschlange ("Wartezeit")

$$p_i \qquad \text{Wahrscheinlichkeit, dass genau } i \geq 0 \text{ Kunden im System sind}$$

$$\text{d.h. } p_i = P[N=i]$$

MQMO, FS 2016

© R. Wüst, A. Klinkert, H. Gröflin

Grundlegende Zusammenhänge

$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda}$$
 Formel von Little
$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu}$$

$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q]$$
 Formel von Little

 Beachte: Falls E[N] gegeben ist, können die anderen drei Leistungsmasse daraus berechnet werden.

Übersicht: Kennzahlen für Modell M/M/1

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Wahrscheinlichkeit für n Kunden im System: $p_n = P[N=n] = \rho^n (1-\rho)$

Beachte:

- Die Formeln sind nur gültig für $\rho < 1$ (gilt immer im stationären System)
- Für $\rho \rightarrow 1$ wachsen alle 4 Kennzahlen ins Unendliche!

3.4 Das Modell M/M/s

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein ankommender Kunde warten muss :

$$\zeta = P[Anz. Kunden im System > s] = \sum_{i=s+1}^{\infty} \pi_i$$

$$\zeta = \pi_0 \frac{(s\rho)^s}{s!} \sum_{i=s+1}^{\infty} \rho^{i-s} = \pi_0 \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}$$

Die mittlere Anzahl Kunden im System bzw. in der Schlange ist :

$$E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = s\rho + \frac{\rho\zeta}{1-\rho}$$

$$E[N_q] = \sum_{i=m+1}^{\infty} (i-m)\pi_i = \frac{\rho\zeta}{1-\rho}$$



Übersicht: Kennzahlen für Modell M/M/2

$$E[N] = \frac{2\rho}{1 - \rho^2}$$

$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{1 - \rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$E[N_q] = \lambda \cdot E[W_q] = \frac{2\rho^3}{1 - \rho^2}$$

$$E[N] = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \qquad \pi_0 = P[N=0] = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

$$E[W] = \frac{E[N]}{\lambda} \qquad = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$E[W_q] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\pi_n = P[N=n] = \begin{cases} 2\rho^2 \frac{1-\rho}{1+\rho} : n=1 \\ \frac{4\rho^n}{2} \frac{1-\rho}{1+\rho} : n=2,3,... \end{cases}$$

Beachte:

- Die Formeln sind nur gültig für ρ < 1 (gilt immer im stationären System)
- Für $\rho \rightarrow 1$ wachsen alle 4 Kennzahlen ins Unendliche!



KAPITEL 4



4.1 Vorhersage im Operations Management

- *Auch:* Prognose, Forecasting
- Viele Entscheide des OM basieren auf Vorhersage
 - Wirksamkeit und Nutzen von Entscheidungen abhängig von ungewisser Zukunft
 - Verwendung von Vorhersagen zur Evaluation alternativer Entscheidungen
 - Planung und Vorbereitung von betrieblichen Abläufen

• Unterscheidung bezüglich Entscheidungsebene (Tragweite):

- a) **Strategisch** (langfristig, ≥ 2 Jahre):
 - Bsp: Entwicklung neuer Produkte, Investitionen in Anlagen, Standortentscheide
- b) **Taktisch** (mittelfristig, Monate bis 2 Jahre):
 - Bsp: Produktionsprogramm-Planung, Budgetplanung, Einkauf
- c) **Operativ** (kurzfristig, Tage bis Monate):
 - Bsp: Lagerhaltung, Ablaufplanung



Weitere Unterscheidungskriterien:

Ökonometrische Prognosen:

- Wirtschaftsindikatoren
- Verwendete Informationsquellen: Extern (d.h. ausserhalb des Unternehmens)

Technologische Prognosen:

- Technologische Entwicklungen bezüglich Produkten, Anlagen, Prozessen
- Verwendete Informationsquellen: Extern und intern

• Nachfrage-/Bedarfsprognosen:

- Bedarfe von Endprodukten, Zwischenprodukten, Rohmaterialien
- Bedarfe an Anlagenkapazität, Personal, Kapital
- Verwendete Informationsquellen: Extern und intern (Vergangenheitsdaten, Marktstudien, ...)
- Focus in diesem Kapitel: Nachfrage-/Bedarfsprognosen

4.1. Vorhersage im Operations Management

Nachfrage-/Bedarfsprognosen:

- Unterscheidung von zwei Arten von Bedarf:
 - unabhängig vs. abhängig
- Unabhängiger Bedarf:
 - Bedarf an Endprodukten
 - Bsp: Fahrräder
- Abhängiger Bedarf
 - Bedarf, der sich aus dem Bedarf von Endprodukten ergibt
 - D.h. Bedarf an Zwischenprodukten, Teilen, Rohmaterialien, Kapazitäten
 - Vgl. Stücklisten
 - Bsp: Räder und Rahmen von Fahrrädern
- Vorhersage bezieht sich auf unabhängigen Bedarf!
 - Abhängiger Bedarf wird davon abgeleitet (i.a. auf deterministische Weise).
- Beachte: Unabhängiger Bedarf kann teilweise beeinflusst werden
 - Bsp: Preisaktionen, ...



Die drei "Grundgesetze" des Forecasting:

- Prognosen sind immer falsch.
- 2. Detaillierte Prognosen sind schlechter als aggregierte Prognosen.
 - Aggregierte Prognosen haben kleinere Variabilität als detaillierte.
 - → Prinzip des Variability Pooling!
 - Bsp: Prognosen für Produktefamilien besser als für einzelne Produkte
- 3. Je weiter Prognosen in die Zukunft reichen, desto weniger verlässlich sind sie.
- "The Art of Forecasting"
 - Forecasting ist sowohl Wissenschaft als auch "Kunst".
 - Unterstützung durch breites Spektrum von quantitativen Modellen
 - Entscheidungsfindung häufig in Zusammenspiel mit qualitativen Informationen und Intuition von Fachleuten
 - Beizug von Spezialisten oft empfehlenswert



4.3 Komponenten einer Zeitreihe

- Zeitreihe: Zeitliche Folge von beobachteten Werten ("Beobachtungen") einer gewissen Modellgrösse ("Variablen")
- Eine Zeitreihe X lässt sich in der Regel erklären durch die "Überlagerung" von 4 Komponenten:

- Trend T Bsp: Nachfrage-Zuwachs eines Produkts

- **Zyklische Schwankungen C** Bsp: Konjunkturzyklen

- Saisonale Schwankungen S Bsp: Nachfrageunterschiede Sommer/Winter

- **Zufällige Schwankungen I** (Autokorrelation)

• "Überlagerung":

Annahme einer multiplikativen oder additiven Verknüpfung

- Multiplikativ: $X = T \cdot C \cdot S \cdot I$

- Additiv: X = T + C + S + I

4.3 Zeitreihen-Modelle: Glättungsverfahren

• Bezeichnungen:

- *i* Zeitperioden, i = 1, 2, ...
- *t* Zeitperiode der letzten Beobachtung *

(d.h. für die Perioden 1,..., t sind Beobachtungen verfügbar)

- $f(t + \tau)$ Prognose für (zukünftige) Periode $t + \tau$, $\tau = 1, 2, ...$
- A(i) Beobachtung in Periode i, i = 1, 2, ...
- F(i) Geglätteter Schätzwert ("Smoothed Estimate") für Periode i, i = 1, 2, ...
- T(i) Geglätteter Trend ("Smoothed Trend") für Periode i, i = 1, 2, ...

• Zeitreihen-Modell:



*Als Beobachtungswert sei im Folgenden der Bedarf eines Produkts angenommen.

4.3.1 Glättungsverfahren bei gleichmässigem Bedarf

Annahme: Bedarf unterliegt nur zufälligen Schwankungen,
 d.h. Zeitreihe hat nur Komponente I.

A) Gleitender Durchschnitt ("Moving Average")

Parameter:

• n: Anzahl berücksichtigte Perioden, $n \ge 1$

$$F(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^{t} A(i)$$
 "Smoothed Estimate"
$$f(t+\tau) = F(t)$$

$$\tau = 1, 2, \dots$$
 "Forecast"

• F(t): Durchschnitt der letzten n Beobachtungen

Dabei ist
$$F(t + 1) = F(t) + \frac{A(t+1)}{n} - \frac{A(t-n+1)}{n}$$

B) Gewichteter, gleitender Durchschnitt ("Weighted Moving Average")

Parameter:

- n: Anzahl berücksichtigte Perioden, $n \ge 1$
- w_i : Gewicht für Periode i, i = 1,...,t, wobei $w_i > 0$ und $\sum_{i=t-n+1}^t w_i = 1$

$$F(t) = \sum_{i=t-n+1}^{t} w_i \cdot A(i)$$
 "Smoothed Estimate"
$$f(t+\tau) = F(t)$$
 $\tau = 1, 2, \dots$ "Forecast"

- F(t): Gewichteter Durchschnitt der letzten n Beobachtungen
- Festlegen der Gewichte: Tendeziell den jüngeren Beobachtungen höhere Gewichte geben als den älteren.

C) Exponentielle Glättung ("Exponential Smoothing")

Exponentielle Glättung ist einfach eine ausgefeilte

Gewichtete Moving Average-Methode

Merkregel:

Schätzwert für die aktuelle Periode Glättungsfaktor Schätzwert für die vorangegangene Periode
$$F(t) = F(t-1) + \alpha \big(A(t) - F(t-1)\big), wobei \ (0 \le \alpha \le 1)$$
 Schätzwert für die vorangegangene Periode Messwert der vorangegangene Periode

Effekt des "Exponential Smoothing"

Parameter:

• α : Glättungsparameter, $0 \le \alpha \le 1$

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot F(t-1)$$
 "Smoothed Estimate"
$$f(t+\tau) = F(t)$$
 "Forecast"

Beachte:

$$f(t+1) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot f(t) = f(t) + \alpha \cdot (A(t) - f(t))$$
Letzte Beobachtung
(Kurzfristiger Einfluss)

Prognose für aktuelle Periode t
(Einfluss älterer Beobachtungen)

Es gilt:

 $\alpha \rightarrow 0$: Starke Glättung, da ältere Beobachtungen stärker gewichtet

 $\alpha \rightarrow 1$: Schwache Glättung, da ältere Beobachtungen kaum ins Gewicht fallen

4.3.2 Glättungsverfahren bei einem Trend

- Annahme: Bedarf unterliegt zufälligen Schwankungen und einem Trend
- D.h. Zeitreihe umfasst die **zwei Komponenten I und T**.

A) Exponentielle Glättung mit (linearem) Trend

Parameter:

- α : Glättungsparameter für Schätzwert, $0 \le \alpha \le 1$
- β : Glättungsparameter für Trend, $0 \le \beta \le 1$

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)]$$
 "Smoothed Estimate"
$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1)$$
 "Smoothed Trend"
$$f(t+\tau) = F(t) + \tau \cdot T(t)$$

$$\tau = 1, 2, \dots$$
 "Forecast"

• Falls α , $\beta \rightarrow 0$: starke Glättung, falls α , $\beta \rightarrow 1$: schwache Glättung

Aufbau:

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot f(t)$$

$$F(t) = \alpha \cdot A(t) + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)]$$

$$Vorhergehender$$

$$geglätteter Schätzwert$$

$$Vorhergehender$$

$$geglätteter Trend$$

$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1)$$
"Neu beobachteter Trend"

4.3.3 Beurteilung der Qualität von Prognosenverfahren

- Häufig benutzte Masse zur Qualitätsbeurteilung:
- A) Mittlere Absolute Abweichung (MAD, "Mean Absolute Deviation")

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{m} |f(i) - A(i)|}{m}$$

B) Mittlere Quadratische Abweichung (MSD, "Mean Square Deviation")

$$MSD = \frac{\sum_{i=1}^{m} [f(i) - A(i)]^{2}}{m}$$

C) "Verzerrung" (BIAS):

$$BIAS = \frac{\sum_{i=1}^{m} f(i) - A(i)}{m}$$

4.3.3 Glättungsverfahren bei Trend und Saisonalität

D.h. Zeitreihe umfasst die zwei Komponenten I und T und S.

Winters Methode (Winters, 1960)

Parameter:

- Glättungsparameter für Schätzwert, $0 \le \alpha \le 1$ α :
- β : Glättungsparameter für Trend, $0 \le \beta \le 1$
- γ : Glättungsparameter für Saisonalität, $0 \le \gamma \le 1$

$$F(t) = \alpha \cdot \frac{A(t)}{c(t-N)} + (1-\alpha) \cdot [F(t-1) + T(t-1)] \quad ""Smoothed Estimate"$$

$$T(t) = \beta \cdot [F(t) - F(t-1)] + (1-\beta) \cdot T(t-1) \quad "Smoothed Trend"$$

$$c(t) = \gamma \cdot \frac{A(t)}{F(t)} + (1-\gamma) \cdot c(t-N) \quad "Smoothed Saisonality"$$

$$f(t+\tau) = [F(t) + \tau \cdot T(t)] \cdot c(t+\tau-N), t+\tau = N+1, \dots, 2N \quad "Forecast"$$

$$f(t+\tau) = [F(t) + \tau \cdot T(t)] \cdot c(t+\tau-N), t+\tau = N+1, \dots, 2N \quad "Forecast'$$

Falls α , β , $\gamma \to 0$: starke Glättung, falls α , β , $\gamma \to 1$: schwache Glättung

Initialisierung von c(t) mit Saisonfaktoren:
$$c(t) = \frac{A(t)}{\sum A(t)/N}$$

4.5 Kausale Modelle: Lineare Regression und **Trendprojektion**

4.5.1 Einfache lineare Regression

- Zweck: Quantifizierung des funktionalen Zusammenhangs zwischen X (unabh. Variable) und Y (abh. Variable)
- Hypothese: *Linearer* Zusammenhang

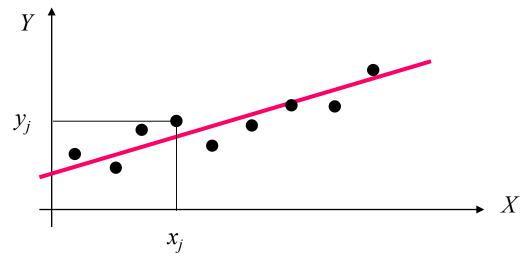
$$Y = A + BX + Zufallsvar.$$
 mit E-Wert 0

Beachte: Auch andere Beziehungen auf lin. Fall zurückführbar Bsp.:

$$Y' = A'X'^{B}$$
: mit $Y = lnY'$, $X = lnX'$, $A = lnA'$: $Y = A + BX$

$$Y' = A + B/X'$$
: mit $X = 1/X'$: $Y = A + BX$

• Beste Schätzungen \widehat{a} und \widehat{b} von A und B anhand von Beobachtungen $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ finden.



• X: deterministische Variable mit Werten $x_1, ..., x_n$ Y: Zufallsvariable (genauer $Y_1, ..., Y_n$ i.i.d. Zuf.var. mit unbek. Varianz σ^2).

$$E(Y_j) = A + Bx_j$$

• Seien

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \overline{y} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j$$

• Beste Schätzungen für \hat{a} und \hat{b} : Wähle \hat{a} und \hat{b} so, dass

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - E(Y_j) \right]^2$$

Minimal ist.

4.5 Kausale Modelle: Lineare Regression und Trendprojektion

$$Q = \sum_{j=1}^{n} [y_j - E(Y_j)]^2 = \sum_{j=1}^{n} [y_j - A - Bx_j]^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(\hat{a}, \hat{b}) = -2 \sum_{j=1}^{n} [y_j - \hat{a} - \hat{b}x_j] = 0$$

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$$

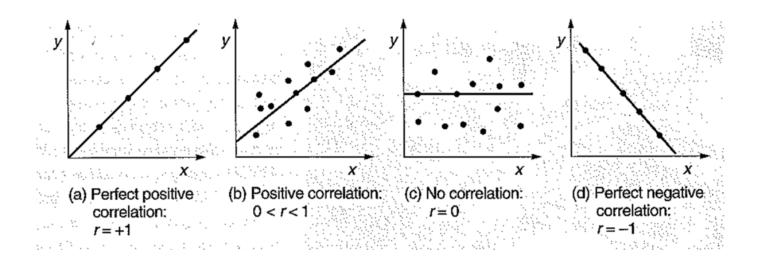
$$\frac{\partial Q}{\partial B}(\hat{a}, \hat{b}) = -2 \sum_{j=1}^{n} [y_j - \hat{a} - \hat{b}x_j] \cdot x_j = 0$$

$$\dots \qquad \hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^{n} [y_j - n\overline{y}\overline{x}]}{\sum_{j=1}^{n} [x_j - n\overline{y}\overline{x}]}$$

4.5.4 Korrelationskoeffizienten für lineare Regressionen

- Zweck: Korrelationskoeffizienten geben die Stärke der linearen Abhängigkeit wieder.
- Der Korrelationskoeffizient r ist ein Wert zwischen -1 (negative Werte: antikorreliert) und +1 (positive Werte: korreliert).
- Werte um 0 lassen vermuten, dass keine Korrelation vorliegt. Die Berechnung ist ähnlich wie die für die lineare Regression.

4.5. Kausale Modelle: Lineare Regression und Trendprojektion



Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Alternative Berechnung von r_{xy} :

$$r_{xy} := \frac{n \sum_{x_j y_j - \sum_{x_j \sum_{y_j}} y_j}}{\sqrt{\left[n \sum_{x_j^2 - \left(\sum_{x_j}\right)^2}\right] \left[n \sum_{y_j^2 - \left(\sum_{y_j}\right)^2}\right]}}$$

3.6 Monitoring und Steuerung von Forecasts

3.6.1 Tracking Signal

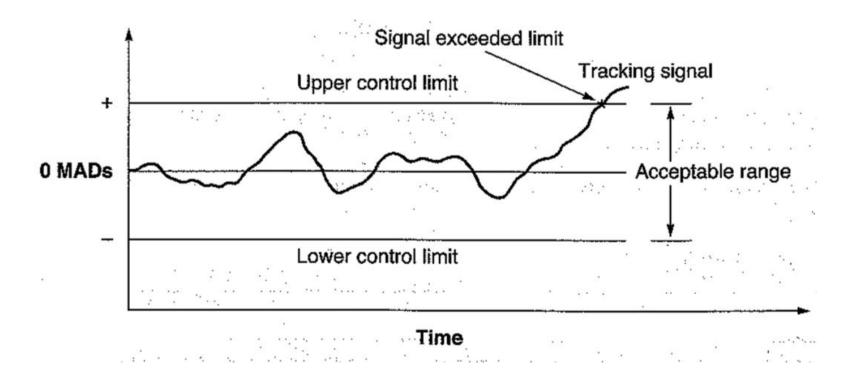
- Zweck: Rollendes (nachgeführtes) quantitatives Mass dafür, wie gut ein Forecast aktuelle Werte vorhersagt
- Berechnung: Verhältnis der laufenden Summe der Forecast-Fehler (*Running sum of the forecast errors, RFSE*) zum mittleren absoluten Fehler (*Mean absolute deviation, MAD*)

Tracking Signal:
$$\frac{RFSE}{MAD} = \frac{\sum (A_i - f_i)}{\sum |A_i - f_i|}$$



4.5. Kausale Modelle: Lineare Regression und Trendprojektion

• Zweck: Rollendes (nachgeführtes) quantitatives Mass, wie gut ein Forecast aktuelle Werte vorhersagt





KAPITEL 5

Institut für Datenanalyse und Prozessdesign IDP Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften ZHAW



• Ein Planungsansatz in 4 Phasen: Methodische Ziele Ansätze Schätzen des Zuverlässigkeit Vorhersagemethoden Verkehrsaufkommens Bestimmung des Service-Niveau *Warteschlangenmodelle* Kosten Optimierung, Simulation Bedarfprofils an Agenten *Uberdeckungsmodelle* Arbeitsregelung Bestimmung der Schichten Ganzz. Lin. Prog. Personalkosten Zulässige Pläne Zuweisung der Agenten zu Zuordnungsmodelle Einzelwünsche Kombinatorische Opt. den Schichten Fairness



• Zielsetzungen:

o Ein bestimmtes Service-Niveau gewährleisten:

→ Modell 1.

o Mit minimalen Gesamtkosten operieren. Welche Kosten?

 \implies Modell 2.

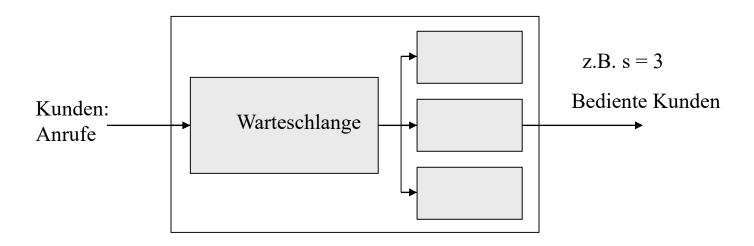
• Modell 1

- Ein gewünschter Service Level, genannt Telephone Service Factor (TSF), wird definiert:
 - ein TSF von x (oder x%) bedeutet (für eine gegebene Zeitschranke n):

Mind. x% der Kunden warten nicht mehr als n Sekunden

- In der Praxis wird häufig eine Schranke von n=20 sec für den TSF gewählt.
- Übliche gewünschte TSF's: im Bereich von 80-95%

o s Agenten: Warteschlangensystem mit s Servicestellen:



Nehme an, das Warteschlangensystem lasse sich durch ein M/M/s – Modell beschreiben.

Service Level oder Telephone Service Factor (TSF):

- Für den TSF wird eine Zeit x vorgegeben, üblicherweise x=20 sec
- Der TSF ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht länger als 20 Sekunden wartet, mal 100, d.h.

$$TSF(s) = F_s(20 \text{ sec}) * 100 = P[W_q \le 20 \text{ sec}] * 100$$

- Vorgehen für die Bestimmung des Agentenbedarfs: Für jede Zeitperiode:
 - Verwende (mit den Ankunfts- und Bedienungsraten der jeweiligen Zeitperiode) wiederholt für wachsende s (Anzahl Bedienungsstellen) Modell M/M/s, um TSF(s) zu berechnen, bis gilt:

$$TSF(s-1) < \text{gewünschter } TSF \leq TSF(s)$$

Die gefundene Anzahl s ist der (minimale) Agentenbedarf in der Periode, der den gewünschten TSF gewährleistet.

- Modell 2 (basiert auf einer Kostenoptimierung)
 - o Fallstudie: Establishing Telephone Agent Staffing Levels through Economic Optimization, B. Andrews and H. Parsons, Interfaces, Vol. 23, Nr.2, 1993. Fall eines grossen Versandhauses (L.L. Bean)
 - o Optimierte Bestimmung des Agentenbedarfs, mit variablem Service-Niveau.

- \circ Kosten C(s) mit s Agenten
- \circ Komponenten von C(s):
 - $-C_1(s)$: Opportunitätskosten. (Kosten resultierend aus Kunden, die anrufen und aufgeben ohne bedient zu werden)

..."We formulated the estimated economic impact of TSF service levels on the expected net profits from sales during each staffing period as shown in the following expression:

The expected lost net profit from telephone orders during staffing period

- = (the expected number of calls per staffing period)
- * (the expected percent of calls generating orders)
- * (the average value of a permanently lost order)
- * (the expected percent of calls abandoned at the TSF service-level)
- * (the probability that a first abandonment is permanently lost)."...

 $-C_2(s)$: Kommunikationskosten (Gratisnummer)

..." The impact that **queuing costs** had on the expected total cost per staffing period is given by the following e~pression, which includes a **recorded** announcement (RAN):

The expected queuing cost during staffing period

- = (the expected number of calls per staffing period)
- * (the fraction of calls that went beyond a recorded announcement, RAN)
- * [(the expected queue time, where queue time > RAN) RAN]
- * (the average cost of connect time). "...

 $-C_3(s)$: Personalkosten (Lohn und Overhead)

The impact that **labor costs** had on the expected total cost per staffing period is given by the following:

The expected labor cost during staffing period

- = (the number of agents on duty)
- * (the average loaded-wage per staffing period).

5.1 Fallstudie: Agentenbedarf in Call Center, Kostenberechnung

Kostenberechnung

 \circ $C_1(s)$: Kosten resultierend aus Kunden, die anrufen und aufgeben ohne bedient zu werden

$$C_1(s) = \lambda \times \nu(s) \times p \times a \times F$$

 λ : mittlere Anzahl Anrufe in der Periode

 $\nu(s)$: Anteil der Anrufe, die aufgeben

p: Wahrscheinlichkeit, dass eine Aufgabe permanent ist

a: Anteil der Anrufe, die eine Bestellung aufgeben

F: Mittlerer Wert einer Bestellung

(d.h. $C_1(s)$ = Mittl. Wert einer Best. mal mittl. Anz. Kunden, die permanent aufgeben und bestellt hätten.)

 $C_2(s)$: Kommunikationskosten

$$C_2(s) = \lambda \times b \times \tau(s) \times G$$

 λ : mittlere Anzahl Anrufe in der Periode

b: Anteil der Anrufe, die über die Dauer der Ansage hinaus warten

 $\tau(s)$: mittlere Dauer der Wartezeit der Anrufe, die über die Ansage hinaus warten, gerechnet vom Ansageende aus.

G: mittlere Kommunikationskosten pro Zeiteinheit

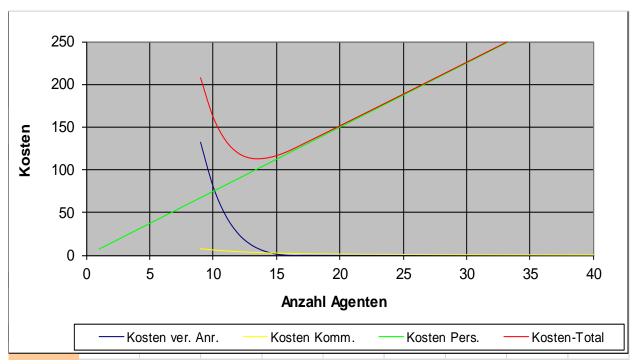


5.1 Fallstudie: Agentenbedarf in Call Center, Kostenberechnung

o $C_3(s)$: Personalkosten

$$C_3(s) = s \times H$$

- H: Salärkosten (mit Overhead) pro Agent und Periode
- o **Aufgabe**: Minimiere C(s), d.h. dasjenige s bei dem die Funktion $C(s) = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s)$ das Minimum annimmt, ist der gesuchte Bedarf an Agenten in der jeweiligen Zeitperiode.

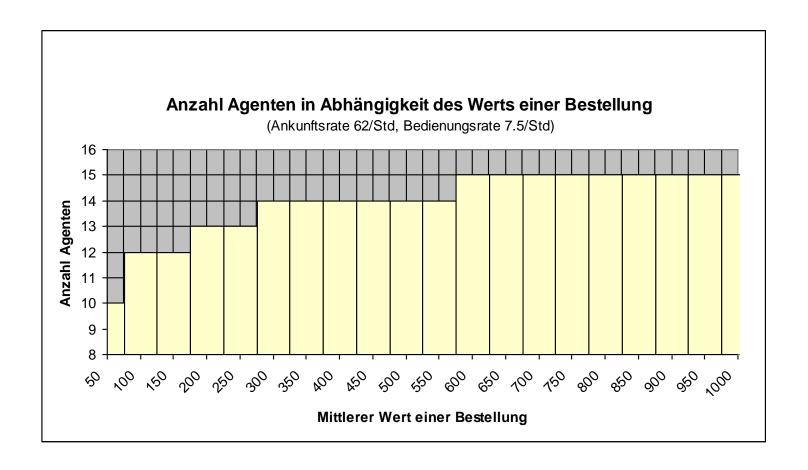


o Tendenzen:

- $-C_1(s)$ Opportunitätskosten: sinkt
- Mit wachsendem *s* :
- $-C_2(s)$ Kommunikationskosten: sinkt
- $-C_3(s)$ Personalkosten: wächst



Optimieren!





5.2 Virtuelle Online Agenten



5 Key Takeaways for Airlines

How to Make Digital Customer Service Soar to New Heights

Replace archaic self-service tools that don't deliver.

Do what Copa Airlines willing to do, which is to face the fact that website FAQs and site search tools are *decade-old* self-service solutions that aggravate the modern airline customer. To really experience this, go ahead and search for "baggage allowance" (or another common topic) on your website. Consider any result other than arriving at the one right answer as a "FAIL", because that's exactly how your customers perceive the experience. You might consider doing 10 searches, to really gauge the severity of the deficiencies on your site. They ARE there, and it's time to fix them.

Eine relevante Antwort anstatt Liste mit irrelevanten Antworten

Strive for accuracy.

Your overall goal should be to improve the accuracy of all online self-service queries by delivering the ONE right answer that customers are looking for. Wrong, missing, or incomplete answers don't close the loop and force customers to escalate, defect or abandon your site. The Forrester data in this report reveals just how frequently these costly outcomes occur.

Keine Rückfragen auf Grund inakkurater Antworten

Right-channel and make escalation options easily accessible.
Earlier you saw how Copa Airlines provides a "Contact Us" link on their virtu

Earlier you saw how Copa Airlines provides a "Contact Us" link on their virtual agent answer page. This sends a strong message to customers about your commitment to helping them. And when you couple this with a real ability to RESOLVE lower-complexity questions in a self-serve manner, you deliver a service experience that puts you at the top of the industry.

Klare Kriterien für Eskalation der Auskunft zum Call-Center-Agent

Convert more by making relevant offers.

Conversion rates improve when you provide relevant offers that match the intent of a customers original question. The best Virtual Agents have this intent-recognition matching intelligence built in. RELEVANT offers open the door to conversions.

Höhere (Buchungs-) Erfolgsrate durch relevante Angebote

Get an independent 3rd party assessment.

Forrester Research, with best practices input from IntelliResponse, has designed a vendor-agnostic tool which allows you to assess the performance of your online self-service. This easy assessment scores your online experience against industry benchmarks, so you can see how you rank and chart a clear path to improvement. Request a free assessment today at info@intelliresponse.com.

Klare Leistungskontrolle der (Auskunfts-)Service-Qualität

More math in original slides!!

KAPITEL 6



6.1 Schichtplanung: Einführendes Beispiel

Wir suchen also denjenigen Punkt $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$ aus der *zulässigen Menge M*, der die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

minimiert.

Es handelt sich hierbei um ein Optimierungsproblem, man schreibt häufig kurz dafür

min
$$f(x_1, x_2,)$$

u.d. Nb: $(x_1, x_2) \in M$ (1)



Analyse des Optimierungsproblems (1):

Zielfunktion (zu optimierende Funktion):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \text{ und } \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

Die Zielfunktion **f** ist also eine lineare Funktion der Variable **x**.

Analyse des Optimierungsproblems (1)

Nebenbedingungen:

Kapazitätsrestriktionen:

$$x_1 + x_2 \le 10 \Leftrightarrow \underbrace{(1,1) \binom{x_1}{x_2}}_{Ax} \le \underbrace{10}_{C}$$

Nachfragerestriktionen:

$$\begin{array}{c} x_1 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{Bx}} \geq \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{D}}$$



6.1 Schichtplanung: Einführendes Beispiel

Analyse des Optimierungsproblems (1):

Die Nebenbedingungen sind also auch durch die linearen Funktionen

beschrieben.

Das Optimierungsproblem (1) kann in folgender Form dargestellt werden.

$$min c^T x$$

u.d.Nb:
$$Ax \le C$$
, (2)
 $D \le Bx$



6.1 Lineare Optimierung: Mathematische (Kurz-)Beschreibung:

Allgemein:
$$\max c^T x$$
 (3)
 $u.d.Nb$: $A_{ue}x \le b_{ue}$
 $A_{eq} x = b_{eq}$
 $1 \le x \le u$

x: Vektor der Entscheidungsvariablen (Bsp.: Ressourcen x)

c: Vektor der Zielfunktionskoeffizienten (Bsp.: Erträge P, oder Kosten C => min)

A_{ue}: Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen (Bsp.: Kapazitätsnebenbed. Inzidenzmatrix)

b_{ue}: Vektor der rechten Seiten, Ungleichungen (Bsp.: maximale Kapazität **CP**)

 A_{eq} : Matrix der Gleichungsnebenbedingungen (-) (Bsp. road pricing: identische Grenzkosten)

b_{eq}: Vektor der rechten Seiten, Gleichungen (-)

1: Vektor der unteren Schranken (Bsp.: Nachfrage 0)

u: Vektor der oberen Schranken (Bsp.: Nachfrage D)



6.1 Einführendes Beispiel, Aufgaben

Einführungsbeispiel in Excel:

$$max \ c^Ty$$

u.d.Nb:
$$Ay \le b$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{eq}} \mathbf{y} = \mathbf{b}_{\mathrm{eq}}$$

$$1 \le y \le u$$

Matrizen als Tabellen im Worksheet

a_{11}	a_{12}	a_{13}	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	
a_{51}	a_{52}	a_{53}	

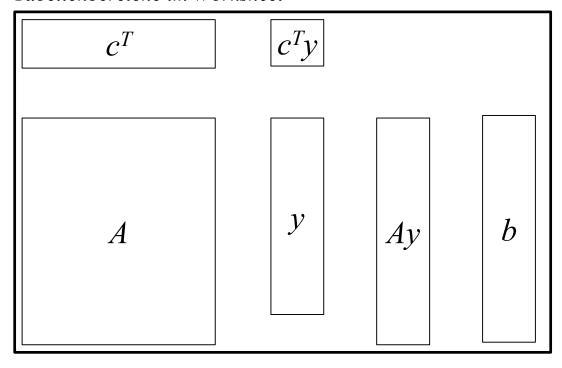
Skalar Produkt

$$SUMMENPRODUKT(C,T): y = \sum_{i,j} c_{ij}t_{ij}$$

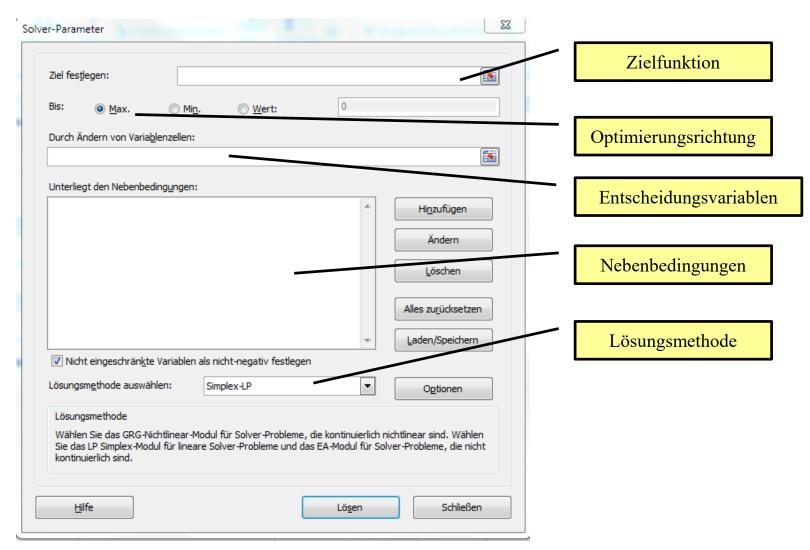
Matrizenprodukt

$$MMULT(A,B): a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Tabellenbereiche im Worksheet



6.1 Excel Solver





6.1 Schichtplanung in einer Telefonzentrale

Modellierung der Schichtplanung für die Telefonzentrale

Mengen:

I Menge der Zeitperioden, $I = \{1, ..., m\}$.

J Menge der Schichten, $J = \{1, ..., n\}$.

Parameter:

 b_i Bedarf (Anzahl Personen) in Zeitperiode $i, i \in I$.

 c_i Kosten für Schicht $j, j \in J$. Berechnet sich aus den entsprechenden Stundensätzen.

 a_{ij} Binärer Indikator mit Wert 1, falls Zeitperiode i in Schicht j enthalten ist, $i \in I, j \in J$.

Variablen:

 x_i Geplante Anzahl Personen für Schicht $j, j \in J$.

Zielfunktion und Restriktionen:

$$\min \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i \in I$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_0 \quad j \in J$$



IDP Institut für Datenanalyse und Operations Management

6.1 Matlab Linprog

Das lineare Optimierungsproblem (3)

max
$$c^Ty$$

u.d.Nb: $Ay \le b$ (3)
 $A_{eq} y = b_{eq}$
 $1 \le y \le u$

kann in Matlab durch Eingabe der Befehle

gelöst werden. Die Optimallösung wird dadurch im Vektor y gespeichert. *intlinprog* minimiert standardmässig, bei Maximierung muss (–p) übergeben werden.

63

Simplex-Algorithmus:

Input: Eine Instanz eines Linearen Programms Π : $\max \{cx : x \in \mathbb{R}^n\}$ mit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und rank A = n. Dazu eine zulässige Basisauswahl $A \subseteq \{1, ..., m\}$, $A \in \mathbb{R}^n \times n$

Output: Eine optimale Eckpunktlösung $v \in P$, falls Π beschränkt ist. Andernfalls eine 'Richtung' $d \in \mathbb{R}^n$, entlang welcher die Zielfunktion unbeschränkt wachsen kann.



6.2 Lineare Optimierung

Beispiel zum Simplex-Algorithmus:

• Zu lösen sei folgendes LP Π : max $\{cx : x \in P\}$, mit $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \le b\}$

$$\max 5x_1 + 8x_2 \qquad (0)$$

$$-3x_1 + 2x_2 \le 2 \qquad (1)$$

$$-2x_1 + 5x_2 \le 16 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 5x_2 \le 72 \qquad (3)$$

$$-x_1 \le 0 \qquad (4)$$

$$-x_2 \le 0 \qquad (5)$$

• In Matrix- bzw. Vektorschreibweise ergeben sich folgende Inputdaten:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 5 \\ 6 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = (5,8)$$

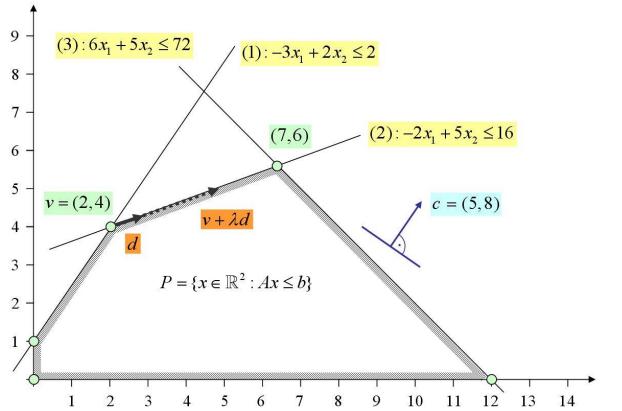


6.2 Lineare Optimierung

Beispiel zum Simplex-Algorithmus

Eine zulässige Basisauswahl ist gegeben durch $B = \{1,2\}$. Die Abbildung zeigt den Lösungsraum P und den Zielfunktionsvektor c des betrachteten LPs . Illustriert wird eine Iteration des Simplex-Algorithmus beim Übergang von Eckpunkt (2, 4) zum benachbarten optimalen Eckpunkt

(7, 6).





KAPITEL 7



67

Was ist Revenue Management?

- Das primäre **Ziel von Revenue Management*** ist das richtige *Produkt* dem richtigen *Kunden* zum richtigen *Zeitpunkt* zu verkaufen.
- Das Wesentliche dieser Disziplin ist das Verstehen der Wahrnehmung des *Produktewert*s durch den Kunden und die richtige Anpassung der *Produktpreis*es, der *Produkteplatzierung* und der *Produkteverfügbarkeit*.

*RM: Ertragsmanagement (deutschsprachige Literatur), Pricing and Revenue Management, Demand Management,



Bedarf-Management Entscheidungen

3 Entscheidungskategorien

- Strukturelle Entscheidungen:
 - Verkaufsformat (feste Preise, Verhandlungen, Auktionen, Verkaufskanäle)
 - Segmentierungstechniken (Geschäftsbedingungen, Produktbündelung)
- Preis Entscheidungen (price-based RM):
 - Preisfestsetzungen,
 - individuelle Preisofferten,
 - Preisverlauf zeitlich (dynamical Pricing)
- Kapazitäts Entscheidungen(capacity-based RM):
 - Annahme von Kaufofferten,
 - Allokation von Kapazitäten zu verschiedenen Segmenten, Produkte oder Kanälen,
 - Zurückhalten von Produkten für späteren Verkauf



Fortsetzung Beispiel

Annahmen:

- Das Hotel hat zwei Preisklassen für seine Zimmer etabliert:
 Voller Preis (VP) und Discount Preis (DP)
- Die Nachfrage nach dem DP liegt zeitlich vor der Nachfrage nach dem VP (wird erreicht durch Buchungsregeln wie Frühbuchung, etc.)

Problem:

Jetzt ist Anfang Dezember. Es gibt erste Nachfragen für Zimmer zu dem DP für Montag 25.12.2016.

→ Wie viele Zimmer sollen für die VP-Zahler reserviert werden?



Fortsetzung Beispiel

Analyse des Problems:

- Booking Limit: Maximale Anzahl Zimmer zu DP
- Protection Level: Anzahl blockierte Zimmer für VP-Zahler

Einfacher Zusammenhang:

Booking Limit=210-Protection Level

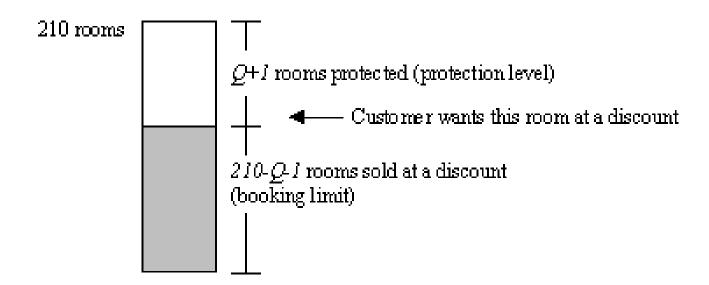
→ Wir versuchen den Protection Level zu bestimmen.



Fortsetzung Beispiel

Situation:

- (Q+1) Zimmer zurückgehalten (protected)
- 210-Q-1 Zimmer bereits zu DP verkauft
- Buchungsanfrage für ein weiteres Zimmer zum DP

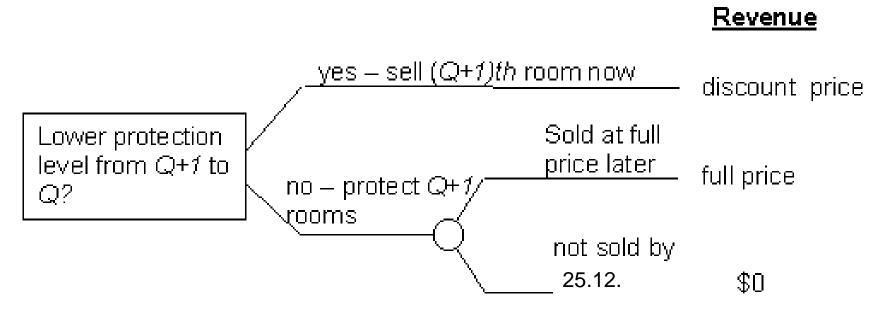




Fortsetzung Beispiel

Dies führt auf einen Entscheidungsbaum der natürlich vom

- (i) Verhältnis der Preise zueinander
- (ii) der zu erwartenden Nachfrage nach VP Zimmern abhängt.

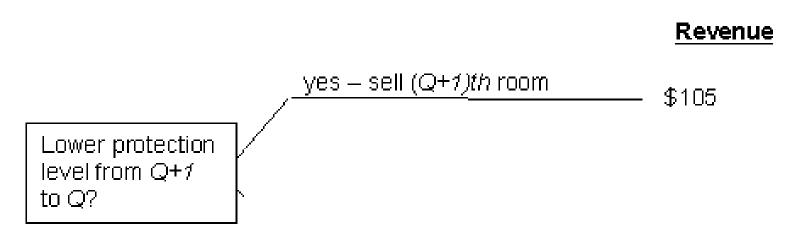




Fortsetzung Beispiel

Um den Wert auf jedem Ast des Entscheidungsproblem zu berechnen brauchen wir:

- (i) VP = \$159, DP = \$105,
- (ii) die Zufallsvariable D, die den Bedarf nach VP Zimmer beschreibt, resp. die Verteilungsfunktion F(Q)=Prob(D ≤ Q)
 (z.B. aus Zeitreihenanalyse, historischen Daten, etc.)



Littlewoods Rule

x: Anzahl noch verbleibender Zimmer (Restkapazität)

Fallunterscheidung

- Die Anfrage für das Zimmer x wird angenommen: Revenue $p_2 = 105
- Die Anfrage für das Zimmer x wird nicht angenommen: Wir verkaufen Zimmer x zu $p_1 = \$159$ nur wenn Nachfrage $D_1 \ge x$. Der erwartete Gewinn für das Zurückhalten der x-ten Einheit ist somit

$$p_1(1 - F(x)) = p_1 \cdot P(D_1 \ge x)$$

Es macht also nur Sinn eine p_2 -Anfrage zu akzeptieren wenn

$$p_2 \ge p_1 \cdot P(D_1 \ge x)$$

Q ist dann optimaler Protection Level wenn gilt:

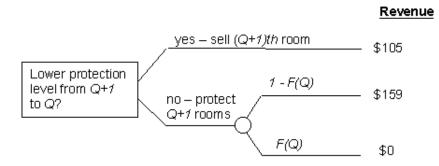
$$p2 < p1 \cdot P(D1 \geq Q) \text{ und } p2 \geq p1 \cdot P(D1 \geq Q+1)$$

Durch Umformung und Einsetzen

von (1 - F(Q)) für P(Q) erhält man

$$Q = F^{-1} (1 - p_2/p_1)$$

Dies wird die Regel von Littlewood genannt



Fortsetzung Beispiel

Alternativen:

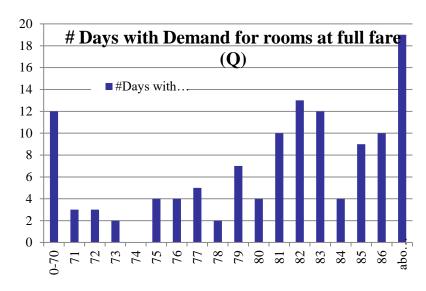
1. \$105,

Protection level von (Q+1) auf Q gesenkt

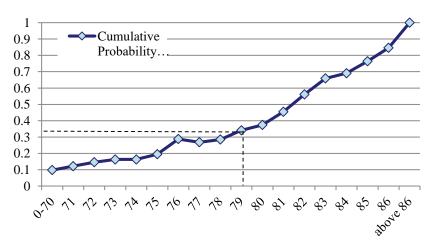
- 2. (1-F(Q))*\$159 + F(Q)*0 = (1-F(Q))*\$159 Protection level nicht gesenkt
- ⇒ Es lohnt sich den Protection level zu senken, falls

$$(1-F(Q))*$159 \le $105$$

 $F(Q) \ge ($159-$105)/$159$



Cumulative Probability: F(Q)=Prob(D<=Q)





Fortsetzung Beispiel

Alternativen:

1. \$105,

Protection level von (Q+1) auf Q senken

- 2. (1-F(Q))*\$159 + F(Q)*0 = (1-F(Q))*\$159 Protection level nicht senken
- ⇒ Es lohnt sich den Protection level zu senken, falls

$$(1-F(Q))*$159 \le $105$$

 $F(Q) \ge ($159-$105)/$159=0.339$

Aus der Tabelle: **Q*=79**

Demand for	# Days with	Cumulative	
rooms at full	Demand	Probability	
fare (Q)		F(Q)	
		=Prob{D≤Q}	
0 - 70	12	0.098	
71	3	0.122	
72	3	0.146	
73	2	0.163	
74	0	0.163	
75	4	0.195	
76	4	0.228	
77	5	0.268	
78	2	0.285	
79	7	0.341	
80	4	0.374	
81	10	0.455	
82	13	0.561	
83	12	0.659	
84	4	0.691	
85	9	0.764	
86	10	0.846	
above 86	19	1.000	
Total	123	1.000	



Netzwerkkapazitätskontrolle, Einführendes Beispiel:

Gemäss der zu erwartenden Buchungsnachfrage stellt sich folgendes neues Entscheidungsproblem:



Wir erwarten für den 5.12.2011 resp. 6.12. 2011 folgende Nachfrage nach Übernachtungen:

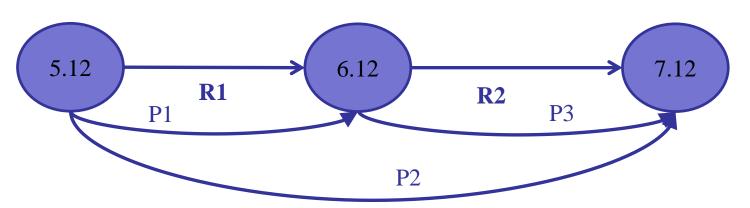
P1, \$105:	P2, \$190:	P3, \$105:
5.12.2011-6.12.2011	5.12.2011-7.12.2011	6.12.2011-7.12.2011
(1 Nacht)	(2 Nächte)	(1 Nacht)
D(P1)= 150	D(P2)= 100	D(P3)= 120

Ein Produkt greift also hier auf mehrere Ressourcen zu. Man spricht deshalb von

Multiple Ressource Capacity Control

oder

Network Capacity Control





Beispiel Gegenüberstellung

Beispiel Single resource capacity control

Gegeben:

- 2 Produkte: VP > DP
- Gesamtkapazität C an einen Zeitpunkt t
- Nachfrage **D**(DP) zeitlich vor Nachfrage **D**(VP)

Aufgabe:

 Bestimme Protection Level für VP bzw. Buchungslimite für DP so dass Ertrag G maximal wird.

Beispiel *Multiple*resource capacity control

Gegeben:

- **3** Produkte: P1, P2, P3
- Gesamtkapazität C(T) in einem **Zeitintervall T** (5.12.-7.12.)
- Nachfrage **D**(P1), **D**(P2), **D**(P3),
 zeitlich **nicht** sinnvoll trennbar

Aufgabe:

 Bestimme die Kapazitätszuordnung (Buchungslimite) für P1, P2, P3 so dass Ertrag maximal wird.

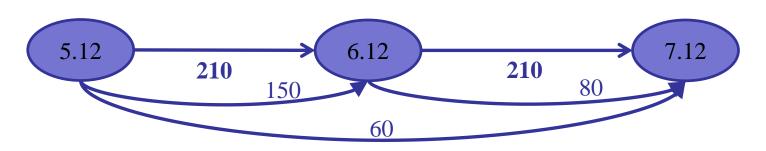
Unsere Aufgabe ist es also wieder jedem Produkt, die Kapazitäten zuzuordnen, die den Gesamtertrag maximieren.



Analyse des Problems:

Wir ordnen jedem Produkt P1-P3 die Kapazität y₁, y₂, y₃ zu. Eine mögliche Zuordnung wäre z.B.

$$y_1 = 150, y_2 = 60, y_3 = 80.$$



Dadurch sind in der ersten Nacht alle Zimmer und in der zweiten Nacht 140 Zimmer belegt.

Daraus ergibt sich der folgende Ertrag (Zielfunktion),

$$p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 = \$105 \cdot 150 + \$190 \cdot 60 + \$105 \cdot 80 = \$35550$$



- Wäre dieses Ergebnis optimal?
- Wie können wir die Kapazitäten y₁, y₂, y₃ wählen?

Kapazitätsrestriktionen:

$$y_1 + y_2 \le 210$$

$$y_2 + y_3 \le 210$$

Nachfragerestriktionen:

$$0 \le y_1 \le 150, 0 \le y_2 \le 100, 0 \le y_3 \le 120$$

Wir nennen die Menge M aller Punkte (y₁, y₂, y₃), die sowohl die Kapazitätsrestriktionen sowie auch die Nachfragerestriktionen einhalten, die **zulässige Menge**.



Wir suchen also denjenigen Punkt (y_1, y_2, y_3) aus der zulässigen Menge M, der die Zielfunktion

$$f(y_1, y_2, y_3) = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3$$

maximiert.

Es handelt sich hierbei um ein Optimierungsproblem, man schreibt dafür kurz

$$\max f(y_1, y_2, y_3)$$

u.d.Nb:
$$(y_1, y_2, y_3) \in M$$



Analyse des Optimierungsproblems (1):

Zielfunktion (zu optimierende Funktion):

$$\mathbf{f}(y_1, y_2, y_3) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 = \mathbf{p}^T \mathbf{y}$$

mit

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T \text{ und } \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

Die Zielfunktion **f** ist also eine lineare Funktion der Variable **y**.



Analyse des Optimierungsproblems (1)

Nebenbedingungen:

Kapazitätsrestriktionen:

$$y_1 + y_2 \le 210$$

$$y_2 + y_3 \le 210$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Av} \le \underbrace{\begin{pmatrix} 210 \\ 210 \end{pmatrix}}_{C}$$

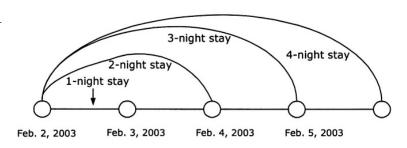
• Nachfragerestriktionen:

$$\begin{array}{l}
0 \le y_1 \le 150 \\
0 \le y_2 \le 100 \\
0 \le y_3 \le 120
\end{array}
\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Wir möchten unser Einführungsbeispiel verallgemeinern.

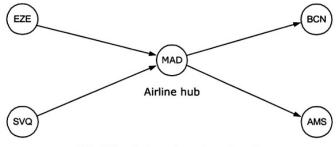
Das Netzwerk hat nun **m** Ressourcen und die Firma verkauft **n** Produkte.



(i) Hotel length-of-stay network

Wir suchen die optimale Allokation von Kapazitäten $y=(y_1,...,y_n)$ für jedes der n Produkte.

 $y=(y_1,...,y_n)$ sind die Entscheidungsvariablen



(ii) Airline hub-and-spoke network



In unserem Einführungsbeispiel konnten wir das lineare Optimierungsproblem mit Hilfe der entsprechenden Vektoren und Matrizen darstellen als

$$\max \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \tag{1}$$

u.d.Nb:
$$\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$$
, (2)

$$0 \le y \le D \tag{3}$$

Wir führen nun die (allgemeinen) Vektoren

- $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, Preise der Produkte,
- $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$, maximale verfügbare Kapazität der Ressourcen,
- $\mathbf{D} = (D_1, ..., D_n)$, erwartete Nachfrage nach den Produkten,



Betrachten wir das Optimierungsproblem (2), so ist die einzige Unbekannte die Matrix A. Wie wird A gebildet?

Sei A_i die i-te Zeile von A, d.h. $A_i = (a_{i1},...,a_{in})$.

Dann sollte das Matrixprodukt A_i y gerade die Summe derjenigen Produkte j ergeben, die Ressource i benützen. Denn A_i y soll ja kleiner als x_i , die Gesamtkapazität von Ressource i, sein.

Daraus kann man schliessen, dass

 $a_{ij} = 1$, falls Produkt j Ressource i benutzt,

$$a_{ij} = 0$$
, sonst,

gelten muss. Man nennt A die Inzidenzmatrix.



In unserem Einführungsbeispiel hatten wir folgende Produkte und Ressourcen:

P1: Übernachtung 5.12-6.12

P2: Übernachtung 5.12-7.12

P3: Übernachtung 6.12-7.12

C1: Raumkapazität 5.12-6.12

C2: Raumkapazität 6.12-7.12

Das heisst:

P1, P2 benutzen R1

P2, P3 benutzen R2

Die Inzidenzmatrix ist entsprechend gegeben durch: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



Netzwerkkapazitätskontrolle, Einführendes Beispiel:

Wir betrachten ein Hotel mit 210 (gleichartigen) Zimmern.



Diesmal umfasst unser Angebot 3 **Produkte**,

- P1: Übernachtung 5.12-6.12
- P2: Übernachtung 5.12-7.12
- P3: Übernachtung 6.12-7.12,

die auf 2 Ressourcen,

- C1: Raumkapazität (C1=210) 5.12-6.12
- C2: Raumkapazität (C2=210) 6.12-7.12, zugreifen.



Einführendes Beispiel, Aufgaben

Beantworten Sie für unser Einführungsbeispiel die folgenden Fragen in Excel (und in Matlab):

- 1. Bestimmen Sie für das Beispiel die optimale Allokation von Kapazitäten y*.
- 2. Ein Partnerhotel möchte für die Nacht vom 6.12 auf den 7.12 10 Zimmer in unserem Hotel reservieren. Man bietet \$100 pro Zimmer. Soll man das Angebot annehmen?
- 3. Ein Konkurrenzhotel öffnet in der Nähe von unserem Hotel. Das Management unseres Hotels überlegt sich eine Preisreduktion auf den Einzelübernachtungen einzuführen um die Nachfrage zu erhalten. Die optimale Allokation y* aus 1. ist jedoch schon in den Buchungssystemen eingegeben und kann nicht mehr geändert werden. Wieviel kann man die Preise der Einzelübernachtungen senken, so dass die Allokation y* immer noch optimal ist?



Einführendes Beispiel, Aufgaben

Daten in Excel:

Prices					
Date	1 night	2 nights			
05.12.2011	\$105,00	\$190,00			
06.12.2011	\$105,00	-			
Demand					
date	1 night	2 nights			
05.12.2011	150	100			
06.12.2011	120	0			
Total capaci	ty (maximun	n number of rooms	per night)		
210					
number of rooms to be reserved					
date	1 night	2 nights			
05.12.2011					
06.12.2011					



Übungsbeispiel: Airline Netzwerk RM

BlueSky Airlines:

BlueSky flies three airplanes between Houston and three cities, Chicago, Miami and Phoenix.

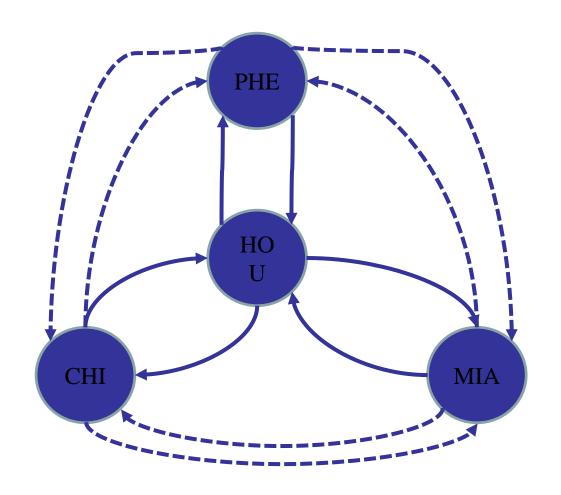
These three cities are the 'spokes' connected by the Houston 'hub'. A few times each day the three airplanes fly from the spoke cities to Houston. They arrive simultaneously at Houston, connecting passengers change aircraft during a 45-minute layover, and the three airplanes depart for the spokes.

One set of six flights (3 inbound to Houston and 3 outbound) is called a bank. Each bank can serve passengers flying on 12 different routes: 3 inbound direct routes (Chicago-Houston or C-H, M-H, and P-H), 3 outbound direct routes (H-C, H-M, and H-P), and 6 routes requiring 2 flights each (C-M, C-P, M-C, M-P, P-C, and P-M).

Frage: Wieviele Produkte (Preise) werden angeboten?



Übungsbeispiel: Airline Netzwerk





Übungsbeispiel: Airline Netzwerk RM

BlueSky Airlines: Network Revenue Management (A)

revenue for each city pair

	· ·	V 1			
		Destination			
		Houston	Chicago	Miami	Phoenix
Origin	Houston	-	\$197	\$110	\$125
	Chicago Miami	\$190	-	\$282	\$195
	Miami	\$108	\$292	-	\$238
	Phoenix	\$110	\$192	\$230	-

demand for each city pair

		Destination			Total Demand for	
		Houston	Chicago	Miami	Phoenix	flight to hub
Origin	Houston	0	123	80	110	-
	Chicago	130	0	98	88	316 (C-H)
	Miami	72	105	0	68	245 (M-H)
	Phoenix	115	90	66	0	271 (P-H)
Total demand for		-	318	244	266	
flight	to spoke		(H-C)	(H-M)	(H-P)	



Aufgabe: