PHIT Formeln

0 Prüfungsvorbereitung

Berkeley-Madonna

~~Analogie Ableitung/Integation (vgl.~~ $\int_0^{t_e} \frac{df}{dt} dt = f(t_e) - f(0)$~~):~~ d/df ~~fliess **in** den Topf;~~ $\int$ ~~fliess **aus** dem Topf~~

In-Flow und Out-Flow

Federn

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k(z - l_0) \end{pmatrix}$$

Energie einer Feder ist eine Parabel mit Minimum bei $x = l_0$; $E_F \approx E_0 + k \cdot \frac{(z-l_0)^2}{2}$

$$|\vec{F}| = \frac{\partial}{\partial z} E_F = -k(z - l_0)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{m} z \Rightarrow z(t) = A\cos(\omega t - \phi), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

They see me rollin'

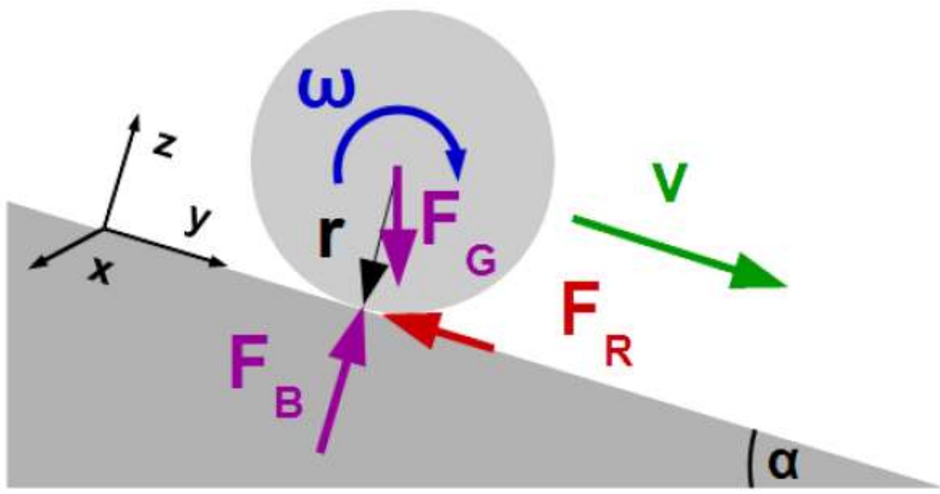
$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}$$

Ein Rad roll waagrecht mit fixem Punkt i (auf dem Boden), Radius r, Winkelgeschwindigkeit ω; Winkel ist $\phi(t) = \omega t$

$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{Si} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \cdot \sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r \cdot \sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega r\cos(\omega t) \\ \omega r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Allgemeine Rollbedingung Berührungspunkt mit Boden (hier initial i) muss Geschwindigkeit 0 haben: $v_s - \omega r = 0$.



Wie gross muss die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Objekts sein, dass die Winkelgeschwindigkeit "passt" (allg. Rollbedingung)? Schwerpunkt s, eine volle Rotation entspricht Δx

$v = \omega r \Rightarrow \Delta x = v_s \Delta t = \omega r \Delta t$

Konvention Zeigt der Vektor zum Betrachter, so rollt es im Gegen-UZS.

1 Kinematik

Kreisbewegung

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}, |\vec{r}\,(t)| = r$$

$$\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}, |\vec{v}\,(t)| = r\omega$$

$$\vec{a}\,(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix}, |\vec{a}\,(t)| = r\omega^2$$

Wurf

Kraft auf Masse ist $(0,0,mg)$, somit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ v_{z,0} - gt \end{pmatrix}, \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} r_{x,0} + v_{x,0}t \\ r_{y,0} + v_{y,0}t \\ r_{z,0} + v_{z,0}t - g\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

- Vertikaler Wurf: $v_{x,0} = v_{y,0} = 0, v_{z,0} \neq 0$
- Wurd vom Dach eines Hauses der Höhe h: $r_{z,0} = h$; Approximation $t \approx \sqrt{2h/g}$

- Schiefer Wurf in x-Richtung: $v_{x,0} \neq 0, v_{y,0} = 0, v_{z,0} \neq 0$

im Slidedeck: Tabelle für konstante Beschleunigung

2 Mechanik

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ mit $d\,\vec{r}\,/dt = \vec{v}\,, d^2\,\vec{r}\,/dt^2 = \vec{a}$

Federn

$m \cdot a(t) = F_{spring}, m \cdot \ddot{x}\,(t) = -k(x(t) - x_{Ruhe})$

ungedämpft:$m \cdot \ddot{x}\,(t) = -k \cdot x(t)$, gedämpft $m \cdot \ddot{x}\,(t) = -k(x(t) - x_{Ruhe}) - \gamma\,\dot{x}$

im Slidedeck: Ballistik

3 Impuls und Energie

$\vec{p} = m\,\vec{v}$

Energie

$$[J] = [\frac{kgm^2}{s^2}]$$

$$E_{mech} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\,\vec{r}$$

$$E_{kin} = m\frac{v^2}{2}$$

$$E_{Feder} = \frac{k(x-L)^2}{2}$$

Kugel fällt von Höhe H: $E_{pot} = mgh(t), E_{pot}(0) + E_{kin}(0) = mgH \Leftrightarrow v(t) = \sqrt{2g(H - h(t))}$

im Slidedeck: Absprengung kleiner Masse von grosser Masse, Kollision zweier Massen

4 Ausgedehnte Körper

$$E_{rot} = J\,\frac{\omega^2}{2}$$

Geschwindigkeit von Punkt i in einem starren Körper: $\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{v}_{Si} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}$

Drehimpuls: $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{R}) \times (m\,\vec{v}) = (\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{p}$

im Slidedeck: rollende Körper, Hebelgesetz, Leitern an der Wand

5 Potentiale, Leistung

$\sum E = const.$

$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$, im Gravitationsfeld von A nach B: $W = mgh_B - mgh_A$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Anziehung, Gravitation

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_G = -\gamma \cdot \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \vec{n}_{12}, \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right], \vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$E_{pot} = -\frac{\gamma m M}{r_{mM}}$$

Gravitationspotential = Energie pro Masse: $\phi(r) = \frac{\gamma M}{r_{mM}}$

Leistung

Leistung = Energie pro Zeit

Gebiet	Stoffmenge	Potential	Energie	Leistung
Elektrizität	Ladung Q	Spannung U	$E = UQ$	$P = UI_Q$
Hydraulik	Volumen V	Druck p	$E = pV$	$P = \Delta p I_V$
Gravitation	Masse m	gh	$E = mgh$	$P = g\Delta h I_m$

im Slidedeck: Satellitenabschuss, schwarze Löcher

6 Elektrische Felder

$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$ ist die Kraft auf Q_1 verursacht durch Q_2, $\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$, $\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Jm}\right]$; für mehrere Ladungen: aufsummieren.

$\vec{F} = q\,\vec{E}$

Kugel: $\vec{E}(r) = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \vec{n}$ Zylinder: $\vec{E}(r) = \vec{F}_{12} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\perp|} \vec{n}_\perp$, Ladungsdichte λ (dünner Zylinder = Draht) Platte: $\vec{E}(r) = \vec{F}_{12} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$, Flächenladungsdichte σ

$$E_{pot}(\vec{r}) = -\int_\infty^{\vec{r}} Q\,\vec{E}\,d\vec{s}, \phi_{el} = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E}\,d\vec{s}$$

Spannung $U = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2)$

$-\nabla E_{pot}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$

$-\nabla\phi(\vec{r}) = \vec{E}\,(\vec{r})$

Kondensator - Kapazität $CU = Q \Leftrightarrow C = \frac{A\epsilon_0}{L}$,Energie $E_{el} = \frac{CU^2}{2}$, $E_{pot} = \frac{A\epsilon_0}{L}\frac{L^2E^2}{2} = V\frac{E^2\epsilon_0}{2}$, mit Fläche A, Abstand L, Volumen V; für 2 Platten ist $Q_2 = -Q_1$

7 RC-Systeme

Spannung U = Potentialdifferenz; Strom I = Änderungsrate der Ladung Q, sprich $I = \frac{dQ}{dt}$

Potentielle Energie E, Leistung P

$E = \phi Q = UQ$

falls Spannung $const.$: $\frac{dE}{dt} = ddt(UQ) = U\frac{dQ}{dt} = UI = P \Leftrightarrow P = UI$

Knotenregel: $\sum I = 0$; basiert auf Ladungserhaltung, gilt immer

Maschen-/Schlaufenregel: $\sum U = 0$; basiert auf Energieerhaltung, gilt nur falls keine, zeitlich veränderlichen äussere Felder auftreten

$U = RI$

Kondensator: Bilanzgleichung der Ladung in der Platte, zu der der Strom hinführt: $\frac{dQ}{dt} = I$

Widerstand U_R	Kondensator U_C	Spule U_L
$U_R = IR$	$U_C = Q/C$	$U_L = L\dfrac{dl}{dt}$

Batterien: $U = U_0 - IR_I$ mit Klemmemspannung U_0 und Verbraucswiderstand R; Strom folgt mit Leerlaufspannung und Widerstand R + Maschenregel: $I = \frac{U_0}{R_I + R}$

8 Induktion

$\vec{B}$-Felder gehen vom Nordpol zum Südpol

$\vec{F_L} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

Zyklotonradius $r = \frac{mv}{qB}$ mit $|\vec{F}_{zentrifugal}| = |\vec{F_L}|$

$\vec{F}_{elmag} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

rechtshändiges Koordinatensystem: Daumen = technische Stromrichtung, Zeigfinger Richtung des Magnetfeldes $\vec{B}$ (N-S), Mittelfinger Richtung der Lorenzkraft $\vec{F}_L$

Wechselstromerzeugung mit gleichförmig drehender Schlaufe: $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi_0)$

Spule ist (fast) eine Menge vieler Kreisschlaufen mit addierenden Feldern

Magnetfeldes eines Leiters ist $\vec{B} = \int_{wire} d\,\vec{B}\,, d\,\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3}$ mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am}\right]$

Für einen geraden Draht mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ r_\perp \end{pmatrix}$ ist $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \\ 0 \end{pmatrix}$

Permeabilität: $B = \mu_r \mu_0 \frac{N}{L} I$ mit N Windungen, Strom I, Länge L, Permeabilitätszahl der Spule μ_r (Fe: 5000, Luft, Wasser: 1)

Fluss eines Feldes durch Fläche: $\Phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$

Farrady'sches Induktionsgesetzt: $U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi = \cdots = -\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{A}\right)$ mit Fläche A, Schlaufe S

Für konstant drehende Fläche $\phi(t) = \omega t$ und $\vec{A}\,(t)$ gilt $U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\omega t) = AB\omega\sin(\omega t)$ mit Fläche der Schlaufe A und B als Stärke des Magnetfeldes $\vec{B}$

Wechselspannung U_{ind} mit Amplitude U_0 und Frequenz $\nu[Hz]$, Kreisfrequenz ω: $U_0 = \omega|\vec{A}||\vec{B}|, \nu = \frac{\omega}{2\pi}, U_{ind}(t) = U_0\sin(2\pi\nu t)$

$T = \nu^{-1} = \frac{2\pi}{\omega}, f(t) = A\sin(2\pi\nu t) = A\sin(\omega t)$

Einfaches Senden + Empfange: 1. Erzeugen periodischer Driverspannung U_drive, 2. Faraday erzeugt daraus $\vec{B}$, 3. \vec{B} erzeugt Spannung U_{receiv} in Receiverschlaufe

Lenz'sche Regel - Magnetfeld eines Ringstroms $d\,\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3}$

im Slidedeck: Perpetuum Mobile, Railun, Coilgun, Wirbelstrombremse

9 Wechselstrom ~~Impedanz~~

$$U_{Nenn} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Für vergleichbaren Gleichstrom U_G (der ja nicht $\sin(t)$ abhängig ist), gilt $U_0 = \sqrt{2}U_G$

(Für Schweiz: $U_{Nenn} = 230V, U_0 = 325V$)

RC-Schaltkreis und Wechselspannung: führt zu Wechselströmen; Spannung über den einzelnen Komponenten fällt frequenzabhängig ab

Faraday für Schlaufen: $U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\omega t) = AB\omega\sin(\omega t)$

Faraday für Spule: $U_{ind}(t) = -N\frac{d}{dt}|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\omega t) = NAB\omega\sin(\omega t)$

mit Fläche der Schlaufe A und B als Stärke des Magnetfeldes $\vec{B}$ und Anzahl Windungen N

Transformator mit Eisenkern und zwei Spulen: $\frac{U1}{U2} = \frac{N1}{N2} = \frac{I2}{I1}$

Spannungsabfall über Spule $U_L = L\frac{dI}{dt}$

Elektrische Induktivität $L = \frac{\mu N^2 A}{\ell}$ [Henry] mit Spulenlänge (nicht Drahtlänge) ℓ, N Windungen, Querschnittsfläche A und Permeabilität $\mu = \mu_r \mu_0$

Dynamik von Schaltungen:

- RC: Ströme durch dQ/dt ersetzen
- LRC: Ladungen und Ströme verwenden

Periode in LC: $T = 2\pi\sqrt{LC}$

im Slidedeck: Low-/High-Pass Filter, Schaltungen mit induktiven Elementen, Henry, Schwingkreis, Impedanz, Drehstrom

10 Schwingungen Resonanz

Lineare Feder (= Kraft linear proportional zur Ausdehnung) mit Federkonstante k[N/m], Gleichgewichtslänge L (bei dieser Länge wirken keine Kräfte): $\vec{F} = -k(|\vec{r}| - L)\frac{r}{|\vec{r}|}$; mit nur einer Koordinate: $F = -k(r - L)$

Masselose, hängende Feder: $F_F = -k(z - L_0)$

Mit Masse: $F = F_F + F_G = -k(z - L_1), L_1 = L_0 + \frac{mg}{k}$

Für Usprung = Gleichgewichtslage gilt: $F = -kz'$

Dynamik: $z(t) = z_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \phi), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\omega = \frac{2\pi}{t}, \nu = T^{-1}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin(\omega t - \phi)^2, E_{pot,Feder} = \frac{k}{2}z^2, E_{pot,Schwingung} = \frac{k}{2}A^2\cos(\omega t - \phi)^2, E_{tot} = \frac{kA^2}{2} = m\frac{\omega^2A^2}{2}$$

Hydrodynamische Reibung / Dämpfung durch Stokes-Reibung: $m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -kz - \gamma v_z, \delta = \frac{\gamma}{2m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$

Resonanz (Schwingung durch äussere Anregung, F_{ext}): $m\ddot{x}(t) = -k(x - x_{Ruhe}) - \gamma\dot{x} + F_0\sin(\Omega t)$

(Auflösungen nach x und Amplitude im Slidedeck) *im Slidedeck: Annäherung von Potentialen durch Schwingungen*

11 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

T in Kelvin!!

Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$

Eine beschleunigte Ladung strahlt Energie ab.

Planck: $I(\nu, t) = \frac{2h\pi\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}, I(\lambda, t) = \frac{2h\pi c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}$

Wien'sches Verschiebungsgesetz: $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ [Js]

$b = 2.8978$ [mm K]

Stefan-Boltzmann: $P = \sigma A T^4$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ [W / m^2 K^4]

Energetische Strahlungsbilanz: $I_E = \sigma A(T_K^4 - T_{env}^4)$

im Slidedeck: Maxwell-Gleichungen, Dipolantenne, Fourierreihen, schwarze Strahler, Planetentemperatur

12 Thermische Strahlung, Elektromagnetische Wellen in Materie

Nanomaschinen benötigen keine Kühlung

Lichtabsorption: $I_L(x) = I_{L,0}e^{-\frac{x}{\lambda}}$

im Slidedeck: Lambert-Strahler, Treibhäuser/Treibhauseffekt