Polynome

Definitionen

Allgemein

Ein Polynom ist eine Summe von Potenzen mit natürlichen Exponenten ($\mathbb{N}_0$) → $2xy + 5y^4 - 4x + 3$. Diese Potenzen können einen Begleitfaktor → Koeffizient haben, mit welchem das jeweilige Glied multipliziert wird. Jede Summe wird als Glied bezeichnet. Daraus ergeben sich folgende Bezeichnungen

- 1-gliedriges Polynom → Monom
- 2-gliedriges Polynom → Binom
- 3-gliedriges Polynom -> Trinom
- n-gliedriges Polynom → Polynom (poly = viel)

Der Grad

Der Grad eines Polynoms ist die Länge des längsten Wortes, das in diesem Polynom vorkommt

→ $7xy - 15x^4 + x^2y^3 \rightarrow Grad\ 5\ (xxyyy)$

Normalform

Als Normalform versteht man die Darstellung eines Polynoms bestehend nur aus Summen von Monomen (ohne Klammern, …).

Schreibweise P(…)

Ein Polynom mit der Variable x wird als $P(x)$ geschrieben.

Multiplikation

Zwei Polynome werden miteinander multipliziert, in dem jedes Glied des ersten Polynoms mit jedem Glied des zweiten Polynoms multipliziert wird und anschliessend die Zwischenresultate addiert werden.

Die Binomischen Formeln

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Das Pascal'sche Dreieck

Anhand des Pascal'schen Dreiecks können die jeweiligen Koeffizienten abgelesen werden.

Faktorzerlegung

Bei der Faktorzerlegung wird der ggT vor die Klammer geschrieben und das, was das Glied zur Vollständigkeit noch braucht in die Klammer geschrieben. → $2x^2 + x - 4ax = x(2x + 1 - 2a)$.

Ausnahme

Falls der Term ein Binom der Form $a^2 + 2ab + b^2$ ist, muss man wissen, dass die Faktorisierung $(a+b)(a+b) \rightarrow (a+b)^2$ beträgt.

Division

Zwei Polynome P1 und P2 werden dividiert, indem man ein Polynom P3 findet, dass gilt $P_3 \cdot P_2 = P_1$

Aus Wikipedia

Das Verfahren funktioniert für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten genau so wie die schriftliche Division ganzer Zahlen mit Rest und kann mit dem gleichen Schema gelöst werden. Hier sind die einzelnen Schritte erläutert:

- So wird die Aufgabe gelöst

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{4 \cdot x^5 - x^4 + 2 \cdot x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

- Wie bei der Division ganzer Zahlen wird zuerst der Summand höchsten Grades des Polynoms p eliminiert. Dazu wird q mit $4x^3$ multipliziert, denn die höchste Potenz von q ist x^2 und es gilt $4x^5 = x^2 \cdot 4x^3$.

$$\begin{array}{lllllllllll}
(4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & -1) & : & (x^2 & +1) & = & 4x^3 \ldots \\
\underline{-4x^5} & & \underline{-4x^3} & & & & & & & \\
 & -x^4 & -2x^3 & & & & & & &
\end{array}$$

- Jetzt wird immer weiter der Summand höchsten Grades eliminiert, bis ein Rest entsteht, der nicht mehr weiter eliminiert werden kann, weil der Grad des Rests kleiner als der Grad von q ist.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & -1) & : & (x^2 & +1) & = & 4x^3-x^2-2x+2+\frac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{-4x^5} & & \underline{-4x^3} & & & & & & & \\
 & -x^4 & -2x^3 & & & & & & & \\
 & \underline{+x^4} & & \underline{+x^2} & & & & & & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & & & & & & \\
 & & \underline{+2x^3} & & \underline{+2x} & & & & & \\
 & & & 2x^2 & +2x & -1 & & & & \\
 & & & \underline{-2x^2} & & \underline{-2} & & & & \\
 & & & & 2x & -3 & & & &
\end{array}
$$